Ostfalia
Hochschule für angewandte
Wissenschaften

ZeLL – Zentrum für erfolgreiches
Lehren und Lernen

BRÜCKENKURS MATHEMATIK

Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften
Hochschule Braunschweig/Wolfenbüttel · Salzdahlumer Str. 46/48 · 38302 Wolfenbüttel
ZeLL - Zentrum für erfolgreiches Lehren und Lernen

Bei Fragen erreichen Sie uns unter: mathe-zell@ostfalia.de

Stand: Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

Erzähle mir und ich vergesse!
Zeige mir und ich erinnere!
Lass' es mich tun und ich verstehe!
Benjamin Franklin

Herzlich willkommen im Brückenkurs Mathematik!

Wir freuen uns, dass Sie an einem unserer Kurse teilnehmen und wir Sie beim Start in Ihr Studium ein Stück begleiten dürfen. Da Mathematik in ihrem Studium eine wichtige Rolle spielen wird, möchten wir Sie beim Einstieg unterstützen. Sicher werden Sie sich das ein oder andere Mal fragen: „Wozu das Ganze?" Schließlich gibt es doch Computer und Taschenrechner, die einem die Arbeit abnehmen können. Für Techniken wie zum Beispiel das Differenzieren, das Integrieren oder das Lösen von Gleichungen gilt das zweifelsohne. Aber um Stärken und Schwächen sowie Einsatzmöglichkeiten solcher Programme zu beurteilen, sind mathematische Kenntnisse notwendig.

Bestandteil des Studiums ist auch das Erlernen der mathematischen Sprache. Dazu gehören zum Beispiel Formeln, Funktionen und Matrizen, mit denen sich viele Sachverhalte eindeutig und kurz beschreiben lassen. Solche Werkzeuge werden benötigt, um reale Probleme formal darzustellen und zu lösen und dann die Lösung wieder auf das Ausgangsproblem zu übertragen. Dies kann aber nur gelingen, wenn Sie die dazu nötigen mathematischen Konzepte kennen und anwenden können.

Wie aber lernt man am besten Mathematik? Genau wie beispielsweise Fahrradfahren in der Regel nicht nur durchs Zuschauen, sondern durch wiederholte eigene Versuche und häufiges Üben erlernt wird, müssen auch mathematische Techniken und Fertigkeiten ausprobiert und regelmäßig trainiert werden. Dieser Kurs legt daher besonderen Wert auf Ihre aktive Mitarbeit und selbstständiges Arbeiten. Dieses Arbeitsheft unterstützt Sie dabei, die elementaren Grundlagen der Mathematik wieder zu erinnern oder noch einmal neu in Einzel-, Partner- und/oder Gruppenarbeit zu erarbeiten. Besonders die kleinschrittigen Anleitungen können dabei hilfreich sein. Weiterhin können Sie durch zahlreiche Übungsaufgaben das „neu Erlernte" festigen. Häufige Tafelarbeit wird Ihnen zahlreiche Gelegenheiten bieten, die mathematische Fachsprache und Präsentationstechniken zu trainieren. Sollten Sie dennoch einige Fragen nicht selbst oder in der Gruppe beantworten können, wird Sie die Lehrkraft gern dabei unterstützen.

Vorweg noch einige Anmerkungen zum Arbeitsheft:

Die meisten Aufgaben im Arbeitsheft sollen Sie ohne Taschenrechner lösen. So erwerben Sie ein Gefühl für Strukturen und Größenordnungen und trainieren das Erkennen von besonderen Zahlen, wie zum Beispiel Quadratzahlen. Einzelne Aufgaben, für die ein Taschenrechner benötigt wird, sind mit einem Taschenrechner-Symbol 🖩 gekennzeichnet.
Einige Textabschnitte sind durch Umrandungen hervorgehoben. Eine durchgehende Umrandung hebt eine **Rechenregel** hervor, während eine gestrichelte Umrandung für eine **Definition** steht. Die Inhalte dieser Abschnitte sollten Sie sich besonders gut einprägen, da Sie sie häufig benötigen werden. Der Abschnitt „Zum Selbststudium“ ist so aufgebaut, dass Sie ihn außerhalb des Kurses lesen und daraus entstehende Fragen in der Gruppe diskutieren können.

Dieses Arbeitsheft beinhaltet grundlegende Aspekte aus verschiedenen Themengebieten der Mathematik:

- **Arithmetik** ist die Lehre von den Zahlen und ihren Verknüpfungen. Im Brückenkurs gehört die Beschäftigung mit Brüchen, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und den zugehörigen Rechenregeln in dieses Gebiet.

- **Algebra** befasst sich mit den Eigenschaften von Verknüpfungen und mathematischen Strukturen. Das Lösen von Gleichungen und das Rechnen mit Variablen oder Unbekannten spielen eine wichtige Rolle im Brückenkurs und sind Teil dieses Gebietes.

Diese Grundlagen werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums immer wieder begegnen. Zu den weiterführenden Themen gehören u.a. das Rechnen mit komplexen Zahlen, Kombinatorik oder numerische Verfahren.

- **Lineare Algebra** beinhaltet das Lösen von Linearen Gleichungssystemen, das im Brückenkurs thematisiert wird. Auch Vektoren, Vektorräume und Matrizen gehören zu diesem Gebiet und finden unterschiedlichste Anwendungen in den Ingenieurs- und Wirtschaftswissenschaften.

- **Analysis** beschäftigt sich hauptsächlich mit den Eigenschaften von Funktionen. Diese treten in nahezu allen Anwendungsbereichen auf, da mit Hilfe von Funktionen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen beschrieben werden können. Im Brückenkurs werden Sie sich mit verschiedenen Darstellungen von Funktionen und speziellen Zusammenhängen (linear, quadratisch, exponentiell, logarithmisch, trigonometrisch) beschäftigen. In vielen Studiengängen spielen dann insbesondere Differenzial- und Integralrechnung eine große Rolle.

- **Geometrie** beschäftigt sich mit räumlichen und ebenen Gebilden. In dieses Gebiet gehören die Brückenkursthemen Winkel, Satz des Pythagoras und Trigonometrie. Die Geometrie hat viele Verbindungen zu anderen mathematischen Teilgebieten (zum Beispiel 2- oder 3-dimensionale Vektorräume oder Trigonometrische Funktionen) und kann hilfreiche Veranschaulichungen bieten.

Und nun lassen Sie uns gemeinsam Mathematik erleben! Viel Spaß dabei wünscht Ihnen das gesamte Matheteam des ZeLL!

1 Begriffe und Rechenregeln

1.1 Terme

Unter einem **Term** versteht man einen mathematisch sinnvollen Ausdruck, der aus Zahlen und/oder Platzhaltern, Klammern und Symbolen für mathematische Verknüpfungen wie $+$, $-$, $\cdot$, $:$ bestehen kann. Er enthält keine Relationszeichen wie $=$, $>$, $<$, $\leq$, $\geq$.

Beispiele: 7 und $a^2 + \frac{b^2}{2} - 5$ und $\sqrt{x+y}$ sind Terme. $4 < 7$ und $3x + 7 = 22$ sind keine Terme.

1. Ergänzen Sie die unten stehende Tabelle mit den folgenden Begriffen.
   $+, -, :, a^b$, Addition, Basis, Differenz, Division, Exponent, Faktor, Minuend, Multiplikation, Nenner, Potenz, Produkt, Quotient, Subtrahend, Summand, Zähler

Symbol/Operator	Rechenoperation	Bezeichnung	Name d. Terms
a ___ b			Summe
a ___ b	Subtraktion		
$a \cdot b$			
a ___ b, $\frac{a}{b}$		Dividend : Divisor, ___	
___	Potenzierung		

Hinweise:

- a^b bedeutet, dass a b-mal mit sich selbst multipliziert wird. $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b-mal}$.
- Bei der Division ist darauf zu achten, dass man nicht durch Null teilen darf. Der Ausdruck $\frac{a}{0}$ ist nicht definiert.
- Produktzeichen, die nicht zwischen zwei Zahlen stehen, können auch weggelassen werden. Beispielsweise schreibt man statt $x \cdot y$ auch kurz xy.

2. Nehmen Sie zu den folgenden Aussagen Stellung.

   a) „Eine Differenz ist auch eine Summe“.

   b) „Eine Summe ist immer größer als ihre Summanden.“

In Termen kann das Minuszeichen in zwei unterschiedlichen Bedeutungen auftauchen:

Rechenzeichen

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$-3 - a = -3 + (-a)$$

$$\nwarrow \qquad \uparrow \qquad \nearrow$$

Vorzeichen

3. Fassen Sie zusammen.

   a) $7 + (-3) =$

   b) $7 - (-3) =$

   c) $7 - 4 - 1 + 2 + (-4) =$

4. Es seien x, y, z Zahlen, für die $x < y$ gilt. Welche der folgenden Zahlen ist größer?

   a) $x + z$ oder $y + z$?

   b) $-x$ oder $-y$?

Hinweis: Diese Aufgabe begründet auch die Rechenregeln für Ungleichungen (siehe Kapitel 12.3).

Für Terme mit verschiedenen Operationen gilt:

Die Zahlenverkehrsordnung

§1 Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung (Po vor Pu vor Strich).

§2 Sollen Terme abweichend von der durch §1 geregelten Reihenfolge abgearbeitet werden, müssen Klammern gesetzt werden. Terme in Klammern werden immer zuerst berechnet.

5. Erläutern Sie die Vereinbarungen der „Zahlenverkehrsordnung“ jeweils an einem Beispiel.

6. Setzen Sie gegebenenfalls Klammern, so dass jeweils die linke und die rechte Seite der Gleichung übereinstimmen.

a) $3 \cdot 7 - 2 + 5 = 20$
   $3 \cdot 7 - 2 + 5 = 14$

b) $15 + 9 : 3 + 2 = 10$
   $15 + 9 : 3 + 2 = 20$

c) $1 + 5 \cdot 2^3 = 41$
   $1 + 5 \cdot 2^3 = 1001$
   $1 + 5 \cdot 2^3 = 48$

d) $10 - 2^3 = 2$
   $10 - 2^3 = -80$
   $10 - 2^3 = 512$

7. a) Ordnen Sie den folgenden Termen die passende Aussage zu.

A:	$(2x+y)^2 + u^2$		ist das Produkt dreier verschiedener Terme
B:	$r(r+1)(r+2)$		ist die dritte Potenz eines Terms
C:	$(1+(a+b)^2)^3$		ist das Quadrat einer Summe von Quadraten
D:	$(1-h)(1+2k-k^2)$		ist eine Differenz von Quadraten
E:	$v^2 - (v-w)^2$		ist die Summe von Quadraten
F:	$(m^2 + (m+1)^2 + n^2)^2$		ist das Produkt zweier verschiedener Terme

b) Ordnen Sie den folgenden Termen die passende Aussage zu.

A:	$4 + (3-x)^2$		ist immer positiv
B:	$(x-1)(x+1)$		kann alle Werte bis auf einen annehmen
C:	$-(4+x)^2 - 6$		ist positiv für $x = 4$ und negativ für $x = 2$
D:	$4 + \frac{1}{x}$		kann nur einen einzigen Wert annehmen
E:	$(x-3)(x^2+1)$		ist Null für $x = 1$
F:	$2(x^2 - 2 - x^2)$		ist immer kleiner als -5

8. a) Gegeben ist ein Produkt mit 3 Faktoren. Wann ist es positiv, wann ist es negativ?

   b) Gegeben ist ein Produkt mit 4 Faktoren. Wann ist es positiv, wann ist es negativ?

   c) Gegeben ist ein Produkt mit n Faktoren. Wann ist es positiv, wann ist es negativ?

9. Schreiben Sie zunächst als Term und berechnen Sie diesen anschließend.

   a) Addieren Sie -943 zum Produkt von -31 und -39.

   b) Subtrahieren Sie von der Summe $7 + (-8)$ die Differenz $6 - 12$.

   c) Multiplizieren Sie das Produkt von -62 und -40 mit der Summe von -31 und 28.

   d) Dividieren Sie das Vierfache der Summe aus 3 und 4 durch das Doppelte der Differenz von 3 und 4.

1.2 Rechengesetze

Terme können mit Hilfe von Rechengesetzen bzw. Rechenregeln umgeformt werden. Dabei ändert sich der Wert des Terms nicht:

Rechengesetze

- Das **Kommutativgesetz der Addition** erlaubt die Vertauschung der Summanden in einer Summe:

$$\bigcirc + \triangle = \triangle + \bigcirc$$
$$a + b = b + a$$

- Das **Kommutativgesetz der Multiplikation** erlaubt die Vertauschung der Faktoren in einem Produkt:

$$\bigcirc \cdot \triangle = \triangle \cdot \bigcirc$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

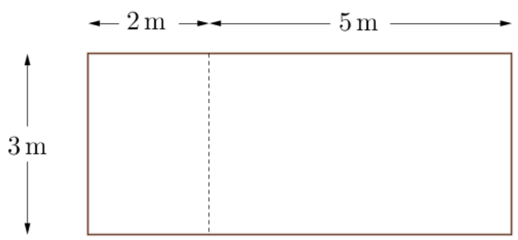
- Nach dem **Assoziativgesetz der Addition** lassen sich die Summanden einer Summe unterschiedlich zusammenfassen:

$$(\square + \bigcirc) + \triangle = \square + (\bigcirc + \triangle)$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- Nach dem **Assoziativgesetz der Multiplikation** lassen sich die Faktoren eines Produktes unterschiedlich zusammenfassen:

$$(\square \cdot \bigcirc) \cdot \triangle = \square \cdot (\bigcirc \cdot \triangle)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

1. Angenommen, das Arbeitszimmer in Ihrer Wohnung ist zu klein. Sie können aber durch Abriss einer Wand den benachbarten Raum mit hinzunehmen und so, wie in der unteren Zeichnung dargestellt, das Arbeitszimmer vergrößern. Wie viel m^2 Teppichboden benötigen Sie, wenn Sie das neue Arbeitszimmer komplett auslegen wollen? Die Wanddicke kann vernachlässigt werden. Rechnen Sie auf zwei Arten.



Das Distributivgesetz

Mit Hilfe des **Distributivgesetzes** kann man die Struktur von Termen verändern, d. h. aus einer Summe kann ein Produkt werden und umgekehrt:

$$\square \cdot \bigcirc + \square \cdot \triangle = \square \cdot (\bigcirc + \triangle)$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Liest man die Gleichung von links nach rechts, so spricht man vom **Ausklammern**, in der anderen Leserichtung vom **Ausmultiplizieren**.

$$\begin{tikzcd} \square \cdot \bigcirc + \square \cdot \triangle \arrow[rr, bend left, "\text{Ausklammern}"] & = & \square \cdot (\bigcirc + \triangle) \arrow[ll, bend left, "\text{Ausmultiplizieren}"] \end{tikzcd}$$

2. Im Supermarkt kaufen Sie fünf Flaschen Bier zum Preis von $1{,}20$ € je Flasche zzgl. $0{,}10$ € Pfand.
   a) Ermitteln Sie den Gesamtpreis auf zwei Arten.

   b) Erläutern Sie mit Hilfe von a) das Distributivgesetz.

3. a) Setzen Sie $\square = a + b$, $\bigcirc = c$ und $\triangle = d$ in die Gleichung $\square \cdot (\bigcirc + \triangle) = \square \cdot \bigcirc + \square \cdot \triangle$ ein. Achten Sie dabei auf das korrekte Setzen von Klammern. Lösen Sie anschließend die Klammern auf der rechten Seite der Gleichung auf.

   b) Was erkennen Sie im vorherigen Aufgabenteil? Formulieren Sie eine Regel.

4. Gilt die in der vorherigen Aufgabe formulierte Regel auch, wenn die Anzahl der Summanden in einer Summe größer als zwei ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. a) Setzen Sie $\square = -1$ in die Gleichung $\square \cdot (\bigcirc + \triangle) = \square \cdot \bigcirc + \square \cdot \triangle$ ein und vereinfachen Sie anschließend die rechte Seite der Gleichung.

   b) Was erkennen Sie im vorherigen Aufgabenteil? Formulieren Sie eine Regel.

   c) Was bedeutet ein negatives Vorzeichen vor einem Term?

   d) Schreiben Sie den Term $-(a + b - c - d)$ ohne Klammern.

   e) Berechnen Sie.

   $2a + 3 - (5a - 4) =$

6. Betrachten Sie nun die folgende Termumformung und notieren Sie, welche Regeln, Gesetze, etc. angewandt wurden.

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot a - 5 \cdot (-3 - a) && | \\
= \; & 2 \cdot a + (-5) \cdot ((-3) + (-a)) && | \\
= \; & 2 \cdot a + (-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-a) && | \\
= \; & 2 \cdot a + 15 + 5 \cdot a && | \\
= \; & 2 \cdot a + 5 \cdot a + 15 && | \\
= \; & (2 + 5) \cdot a + 15 && | \\
= \; & 7 \cdot a + 15
\end{aligned}$$

7. Schreiben Sie die folgenden Produkte als Summen.
   a) $(0{,}5m + 1{,}2n) \cdot 6 =$
   b) $(x + 3y) \cdot x^2 =$
   c) $(8x + 2xz) \cdot 5x^2 =$
   d) $(-a) \cdot (-a + 4c) =$
   e) $(-3ax) \cdot (3c - 3y - 5) =$
   f) $(-c) \cdot (5c - 7a + 4x) =$
   g) $(0{,}4ab - 1)(0{,}4ab - 0,2) =$
   h) $(-7de + 6eg) \cdot (de - 5eg) =$
8. Schreiben Sie die folgenden Summen als Produkte. Klammern Sie dabei so weit wie möglich aus.
   a) $7ax + 14bx =$
   b) $24x^3y^2 + 18x^2y^2 =$
   c) $0{,}14rs + 0{,}42r^2 + 0{,}28rs^2 =$
   d) $20d^2ef - 16def^2 =$
   e) $(x + y)^3 - (x + y)^2 =$
   f) $6y^2 \cdot (z + 5) + 2z + 10 =$
   g) $(a - b) \cdot (2x + 3y) - (a - b) \cdot (x - y) + (a - b) \cdot (x - 3y) =$
9. Fassen Sie zusammen.
   a) $25m + (13n - 8z) + (5z + 7m) - (11m + 5n) - (13z - 17n) =$
   b) $(3a + 5b) - (11a - [5c - (9b - 8a)] + 13b) =$

1.3 Die binomischen Formeln

Zum Vereinfachen von Termen ist es oft sinnvoll, Summen zu faktorisieren, d. h. als Produkt zu schreiben. Können Sie die folgenden Summen faktorisieren?

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2$$

1. Multiplizieren Sie aus.

   a) $(a + b)^2 =$

   b) $(a - b)^2 =$

   c) $(a + b)(a - b) =$

Mit Hilfe dieser Formeln können Sie die obigen Terme faktorisieren. Sie heißen **binomische Formeln**:

Die binomischen Formeln

1. binomische Formel:	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel:	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel:	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

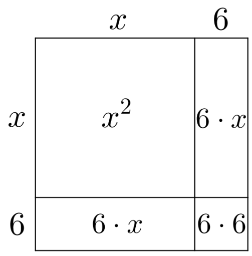
2. Veranschaulichen Sie die erste und zweite binomische Formel mit Hilfe von Flächeninhalten.

3. Für welche Werte von a und b gilt $(a - b)^2 = (b - a)^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Multiplizieren Sie mit Hilfe einer binomischen Formel aus.
   a) $(3-5a)^2 =$
   b) $(2x+y)^2 =$
   c) $(2-0{,}6b)\cdot(2+0{,}6b) =$
   d) $(2+1{,}4b)^2 =$

5. Faktorisieren Sie mit Hilfe einer binomischen Formel.
   a) $49a^2+42ay+9y^2 =$
   b) $0{,}64a^2-4c^2 =$
   c) $36a^2-1{,}96d^2 =$

6. Womit muss man x^2+12x ergänzen, um die erste binomische Formel anwenden zu können?



Diese Ergänzung heißt **quadratische Ergänzung**. Sie wird Ihnen unter anderem bei der Herleitung der pq-Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen wieder begegnen.

7. Ergänzen Sie die fehlenden Summanden.
   a) $(3a+\qquad)^2 = 9a^2+\qquad+16c^2$
   b) $(\qquad-\qquad)^2 = 49d^2-\qquad+81e^2$
   c) $(\qquad-\qquad)^2 = \qquad-3{,}2de+0{,}64e^2$

8. Klammern Sie in dem Term $\bigcirc\triangle+\triangle\Box+\lozenge\Box+\bigcirc\lozenge$ so weit wie möglich aus.

1.4 Gemischte Übungsaufgaben zu Termumformungen

1. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

   a) $16 \cdot (2a + b) =$

   b) $5p \cdot (2{,}5p + 7) =$

   c) $x \cdot (7 + y) + 3 \cdot (x + z) + 5 \cdot (y + z) =$

   d) $3b \cdot (5x - b + 4) =$

   e) $(-ax) \cdot (3ax - 3c - 4y) =$

   f) $(-2df) \cdot (-10eg + 9d + 3de) =$

   g) $(2c - 1) \cdot (2c + 2) =$

   h) $(0{,}1d + 6) \cdot (-3d - 1) =$

   i) $(0{,}1d - 4) \cdot (-d - 1) =$

   j) $(2ab + 3) \cdot (4ab - 0,2) =$

   k) $(0{,}4ab - 1) \cdot (-0{,}4ab + 0{,}6) =$

   l) $5(x + y + z) - 7(x - y + z) - 8(x + y - z) =$

   m) $69p + [13q - (17p + 11q)] - [11p - (13p - 17q)] =$

   n) $0{,}5x(-1{,}2ay) - (7ax) \cdot 0{,}2y + 0{,}4x \cdot (-4ay) =$

2. Klammern Sie so weit wie möglich aus.

   a) $6a^2b + 8ab^2 =$

   b) $39a^2x^2 + 65b^2x + 91x^3 =$

   c) $4def - 10e^2f =$

d) $20ef^2 + 5e + 15deg =$

e) $20c - 25b^2c + 15bc^2 =$

f) $36ab + 6a + 48a^2b^2 =$

g) $60a^2b^2c + 36ac + 84acd^2 =$

h) $11xy + 33ax - 22xz =$

i) $ax + bx + ay + by =$

j) $b^2 \cdot (b - c) + c^2 \cdot (c - b) =$

3. Multiplizieren Sie mit Hilfe einer binomischen Formel aus.

a) $(3a - 0{,}9)^2 =$

b) $(1{,}2a - 0{,}2d)^2 =$

c) $(0{,}5a + 0{,}2y)^2 =$

4. Geben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe einer binomischen Formel als Produkt von Summen bzw. Differenzen an.

a) $16a^2 - 72acy + 81c^2y^2 =$

b) $0{,}09d^2 - 0{,}81g^2 =$

c) $9d^2e^2 + 42deg + 49g^2 =$

5. Ergänzen Sie die fehlenden Summanden.

a) $(d - \ \dots\ )^2 = \ \dots\ - 12dg + 36g^2$

b) $(\ \dots\ + 5)^2 = \ \dots\ + 10a + 25$

c) $(d - \ \dots\ )^2 = d^2 - 6de + \ \dots$

2 Brüche

2.1 Bedeutung eines Bruches

1. a) Was verstehen Sie unter einem Bruch? Kreuzen Sie an.

   - [ ] eine Größe
   - [ ] ein Verhältnis
   - [ ] eine Prozentzahl
   - [ ] die Division zweier Zahlen
   - [ ] einen Anteil
   - [ ] eine Dezimalzahl

   b) Schreiben Sie unter Verwendung von Brüchen.

   - Vier geteilt durch sieben
   - 75 Zentimeter
   - $1{,}375$
   - 37 Prozent
   - den fünften Teil vom Kuchen
   - 3 von 7 Anwesenden sind weiblich

   c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil b) mit Ihren Antworten aus Teil a).

2.2 Bruchrechnung

Ein Quotient aus zwei Termen a und b (also $a : b$ mit $b \neq 0$) kann auch in der Form $\frac{a}{b}$ dargestellt werden. Diese Darstellung heißt **Bruch**. Dabei wird a als **Zähler** des Bruches und b als **Nenner** des Bruches bezeichnet.

Erweitern und Kürzen

1. Zwei Lerngruppen lernen für eine Mathematik-Klausur und bestellen sich zur Stärkung Pizza. Die erste Gruppe besteht aus 7 Studierenden und bestellt 4 Pizzen. Die andere Gruppe ist zu fünft und bestellt 3 Pizzen. In welcher Gruppe bekommt jeder Studierende mehr Pizza, wenn die Pizzen jeweils gleichmäßig auf die Studierenden verteilt werden?

Brüche erweitern und kürzen

- Einen Bruch zu **erweitern** heißt, Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor ($\neq 0$) zu multiplizieren.
- Einen Bruch zu **kürzen** heißt, Zähler und Nenner durch den gleichen Divisor ($\neq 0$) zu teilen.

Beim Erweitern oder Kürzen verändert sich der Wert eines Bruches nicht:

$$\frac{a}{b} \quad \underset{\text{Kürzen}}{\overset{\text{Erweitern}}{=}} \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad (b, c \neq 0)$$

2. Machen Sie anhand von Bildern deutlich, was Erweitern und Kürzen bedeutet.

3. Erweitern Sie die folgenden Brüche ($a \neq \frac{3}{2}b$).

   a) $\dfrac{3}{7}$ mit 5

   b) $\dfrac{5a}{6}$ mit $2b$

   c) $\dfrac{2a+3b}{2a-3b}$ mit $(4a-6b)$

   d) $\dfrac{1}{7}$ mit -1

4. Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich ($a, b \neq 0$).

   a) $\dfrac{3}{6} =$

   b) $\dfrac{384}{288} =$

c) $\dfrac{12a}{18a} =$

d) $\dfrac{ab^2}{a^2b} =$

5. Anna rechnet:

$$\frac{6+3\cancel{a}}{\cancel{a}} = 6+3 = 9$$

Jim : Das ist so, glaub ich, falsch. Wir dürfen nur kürzen, wenn im Zähler und Nenner Produkte stehen.

Anna : Aber $3a$ ist doch ein Produkt, da es eine Kurzschreibweise für $3 \cdot a$ ist.

Irene : Kürzen heißt aber den Zähler und den Nenner durch dieselbe Zahl zu teilen.

Anna : Genau das habe ich doch gemacht: a geteilt durch a ist 1 und $6 + 3a$ geteilt durch a ist $6 + 3$.

Jim : Ich bin immer noch nicht überzeugt.

Irene : Lass uns mal die Probe machen! Setzen wir doch ein paar Zahlen ein und gucken, ob auf beiden Seiten das Gleiche herauskommt.

Berechnen Sie $\dfrac{6+3a}{a}$ einmal für $a = 1$ und einmal für $a = 2$.
Wie erklären Sie sich die Ergebnisse?

6. Anna hat noch ein Problem:

Anna : Kannst du mir mit dieser Aufgabe mal helfen? Kann man $\frac{6ab+3a}{a}$ kürzen?

Jim : Ich bin mir nicht sicher. Im Zähler steht ja immer noch kein Produkt, sondern eine Summe.

Irene : Ja, aber man kann doch hier aus der Summe ein Produkt machen.

Jim : Richtig! Wir können das a ausklammern. Dann steht da $\frac{a \cdot (6b+3)}{a}$. Dann können wir ohne Probleme Zähler und Nenner durch a teilen und erhalten $\frac{\cancel{a} \cdot (6b+3)}{\cancel{a}} = 6b + 3$.

Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich ($a \neq -18$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}z$).

a) $\dfrac{15x - 24y}{3} =$

b) $\dfrac{-2x + 16xy}{2x} =$

c) $\dfrac{4x + 2y}{8x^2 + 12y^2} =$

d) $\dfrac{9x^2 - 12xz + 4z^2}{2z - 3x} =$

e) $\dfrac{12 + a}{18 + a} =$

7. Kann der Bruch $\frac{-a}{b-c}$ als $\frac{a}{c-b}$ geschrieben werden? Begründen Sie.

8. In welchen Zusammenhängen ist es sinnvoll, Brüche zu erweitern bzw. zu kürzen?

Addieren und Subtrahieren

9. a) Begründen Sie anhand von Beispielen oder Bildern, warum

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

keine sinnvolle Regel zur Addition von Brüchen ist.

b) Wie sollte man bei der Addition bzw. Subtraktion von Brüchen vorgehen? Benutzen Sie Ihre Überlegungen aus Aufgabe 8.

10. Addieren bzw. subtrahieren Sie die folgenden Brüche ($a, b \neq 0$ und $x \neq -y$). Geben Sie einen vollständig gekürzten Bruch als Lösung an.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

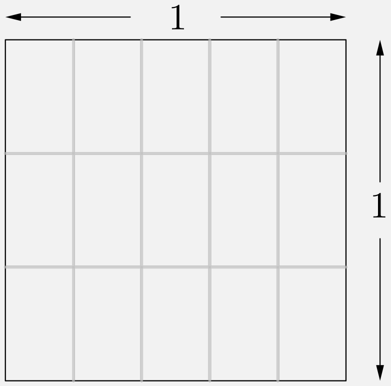
b) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} =$

c) $\frac{3}{34} + \frac{4}{51} =$

d) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{-x-y} =$

Multiplizieren

11. a) Markieren Sie $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$ des unten gegebenen Quadrates und berechnen Sie den Flächeninhalt der markierten Fläche.



b) Wie hilft Ihnen Teil a) bei der Multiplikation $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$?

c) Benutzen Sie die vorherigen Aufgabenteile, um eine allgemeine Regel für die Multiplikation von Brüchen aufzustellen.

12. Multiplizieren Sie die folgenden Brüche ($a \neq -b$ und $a \neq 0$). Geben Sie einen vollständig gekürzten Bruch als Lösung an.

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} =$

b) $\frac{-24}{35} \cdot \frac{-5}{18} =$

c) $\frac{7a^3}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2} =$

d) $\frac{42}{15} \cdot \frac{25}{7} =$

e) $3 \cdot \frac{1}{5} =$

Dividieren

13. a) Berechnen Sie mit Hilfe des Anwendungsbeispiels das Ergebnis der Division. Mit welchem Bruch muss man multiplizieren, um das gleiche Ergebnis zu erhalten?

- Wie viele 2 l-Flaschen können Sie mit 8 l Wasser füllen?

$$8 : 2 = \qquad = 8 \cdot \frac{\qquad}{\qquad}$$

- Was ist die Hälfte von $\frac{2}{3}$?

$$\frac{2}{3} : 2 = \qquad = \frac{2}{3} \cdot \frac{\qquad}{\qquad}$$

- Wie viele $0{,}5$ l-Gläser können Sie mit 4 l Bier füllen?

$$4 : \frac{1}{2} = \qquad = 4 \cdot \frac{\qquad}{\qquad}$$

- Wie viele $\frac{2}{3}$ l-Flaschen können Sie mit 2 l Wasser füllen?

$$2 : \frac{2}{3} = \qquad = 2 \cdot \frac{\qquad}{\qquad}$$

b) Vergleichen Sie jeweils den Divisor mit dem von Ihnen ergänzten Faktor. Was fällt Ihnen auf?

c) Benutzen Sie die vorherigen Aufgabenteile, um eine Vermutung für die allgemeine Regel für die Division von Brüchen aufzustellen.

d) Erweitern Sie den Bruch $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ mit $\frac{d}{c}$ und vereinfachen Sie. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Ihrer Vermutung aus Aufgabenteil c).

Der **Kehrwert** eines Terms T ist derjenige Term T^*, der mit dem ursprünglichen Term T multipliziert 1 ergibt. Es gilt also $T \cdot T^* = 1$.
Den Kehrwert (auch Kehrbruch) eines Bruches $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ erhält man, indem man Zähler und Nenner miteinander vertauscht.

14. Hat jede Zahl einen Kehrwert? Begründen Sie Ihre Antwort.

15. Studierende bestimmen als Kehrwert von $1 + \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0$ und $b \neq -a)$ die folgenden Ausdrücke:

$$1 + \frac{b}{a}\,, \quad \frac{b}{a+b}\,, \quad \frac{a}{b+1}\,, \quad 1 - \frac{a}{a+b}\,.$$

Nehmen Sie Stellung zu diesen Ergebnissen.

16. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Kehrwerte der folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{2}{-5}$ c) $1 - \frac{1}{x}$ d) 0 e) $\frac{y}{0}$ f) 42 g) $\frac{-9}{1}$ h) $\frac{y}{2} + \frac{z}{3}$

17. Dividieren Sie die folgenden Brüche ($a \neq -6b$ und $a \neq \frac{5}{3}b$ und $a, b \neq 0$). Geben Sie einen vollständig gekürzten Bruch als Lösung an.

a) $\frac{7}{4} : \frac{2}{3} =$

b) $\frac{9}{2} : a =$

c) $\frac{25a^2}{49b^2} : \frac{15a}{35b} =$

d) $\frac{18a^2 - 50b^2}{a + 6b} : \frac{3a - 5b}{3a^2} =$

18. Welcher Wert ist mit folgendem Ausdruck gemeint?

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}$$

Sie haben in diesem Kapitel hergeleitet:

Die Bruchrechenregeln

- Gleichnamige Brüche, also Brüche mit gleichem Nenner, werden **addiert/subtrahiert**, indem die Zähler addiert/subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird.
  Brüche mit verschiedenen Nennern müssen zunächst durch Erweitern oder Kürzen auf den gleichen Nenner gebracht werden.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \;, \quad (b \neq 0)$$

- Zwei Brüche werden **multipliziert**, indem jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \;, \quad (b, d \neq 0)$$

- Zwei Brüche werden **dividiert**, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrbruch des zweiten Bruches multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \;, \quad (b, c, d \neq 0)$$

2.3 Gemischte Übungsaufgaben zur Bruchrechnung

1. Berechnen Sie.

   a) $\frac{10}{25} + \frac{16}{28} =$

   b) $\frac{1}{33} - \frac{2}{55} =$

   c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) =$

   d) $-\frac{16}{25} : \frac{12}{-20} =$

   e) $\frac{3}{14} \cdot \frac{35}{9} \cdot \frac{81}{40} =$

2. Erweitern Sie die folgenden Brüche.

   a) $\frac{1}{x}$ mit $7y, \quad (x, y \neq 0)$

   b) $\frac{1}{x+1}$ mit $(x-1), \quad (x \neq \pm 1)$

   c) $\frac{z-9}{9}$ mit $-(9-z), \quad (z \neq 9)$

   d) $\frac{x-2y}{y-x}$ mit $(-x+y), \quad (x \neq y)$

3. Kürzen Sie so weit wie möglich.

   a) $\frac{36a^2}{12ab}, \quad (a, b \neq 0)$

   b) $\frac{18^3}{9^2 \cdot 16}$

   c) $\frac{25a^2 - 49b^2}{21b - 15a}, \quad (a \neq \frac{7}{5}b)$

   d) $\frac{7ab - 6a^2}{12a - 14b}, \quad (a \neq \frac{7}{6}b)$

   e) $\frac{9x - 4y}{45x + 28y}, \quad (x \neq -\frac{28}{45}y)$

4. Fassen Sie zusammen und vereinfachen Sie.

a) $\dfrac{56}{21a} - \dfrac{1}{3a}, \quad (a \neq 0)$

b) $\dfrac{44a}{33b} - \dfrac{3b}{4a}, \quad (a, b \neq 0)$

c) $\dfrac{x}{x+y} - \dfrac{y}{x-y}, \quad (x \neq \pm y)$

d) $\dfrac{x^3 z}{x^3 z + yx^2 z} - \dfrac{7y^2}{7xy - 7y^2}, \quad (x \neq \pm y;\ x, y, z \neq 0)$

e) $\dfrac{3c + 4d^2}{12c^2 d} + \dfrac{6c^2 - 4{,}5d}{18cd^2}, \quad (c, d \neq 0)$

f) $\dfrac{a}{72(a-b)} + \dfrac{b^2}{48(a^2 - b^2)}, \quad (a \neq \pm b)$

5. Vereinfachen Sie.

a) $\dfrac{12a + 9b}{4a - 3b} \cdot \dfrac{8a - 6b}{4a + 3b}, \quad (a \neq \pm\dfrac{3}{4}b)$

b) $\dfrac{8y}{3x} \cdot \dfrac{15x^2}{56y^2}, \quad (x, y \neq 0)$

c) $\dfrac{\dfrac{9a^2bc^2}{81ab^2c}}{\dfrac{a^2bc}{27a^2b^2c}}, \quad (a, b, c \neq 0)$

d) $\dfrac{\frac{x^5 - x^3y^2}{x+y}}{2x^4 + 5x^3} \cdot \dfrac{2x + 5}{x - y}, \quad (x \neq -\dfrac{5}{2}, x \neq \pm y, x \neq 0)$

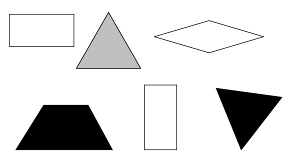
3 Grundlegende Definitionen

3.1 Mengen

Eine **Menge** ist eine Struktur, die dazu dient, beliebige unterschiedliche Objekte zusammenzufassen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Ein Objekt kann dabei alles denkbare sein (z. B. Zahlen, Paare, Symbole, Menschen, Dinge, ...).
Ob Darstellungen dasselbe oder verschiedene Objekte beschreiben, hängt vom Kriterium für die Unterscheidbarkeit ab.
Mengen kann man mit der **aufzählenden Schreibweise** darstellen, indem man die Elemente in beliebiger Reihenfolge, durch Komma oder Semikolon getrennt, in geschweiften Klammern schreibt, zum Beispiel $\{\text{Hans}; \diamond; \pi; 5\}$. In der Regel wird jedes Element nur einmal genannt.

Beispiel:

Objekte	Unterscheidungsmerkmal	Menge
	Anzahl Ecken	{Dreieck; Viereck}
	Geometrische Form	{Trapez; Rechteck; Raute; Dreieck}
	Geom. Form und Farbe	{schwarzes Dreieck; graues Dreieck; weißes Rechteck; weiße Raute; schwarzes Trapez}

Die Elemente in Zahlenmengen werden durch den Wert der Zahl unterschieden. Damit beschreiben beispielsweise die Darstellungen $0{,}5$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$ oder $\frac{17}{34}$ alle dieselbe Zahl.
Für ein beliebiges Objekt lässt sich immer entscheiden, ob es in der Menge enthalten ist oder nicht.
Ist ein Element x in einer Menge M enthalten, so schreibt man $\boldsymbol{x \in M}$ und spricht „x Element M", ansonsten $\boldsymbol{x \notin M}$, also „x nicht Element M". Enthält eine Menge keine Elemente, so nennt man sie **leere Menge** und schreibt $\{\}$ oder $\emptyset$.
Um Mengen mit (unendlich) vielen Elementen darzustellen nutzt man oft die **beschreibende Schreibweise**.
Diese hat folgende Form:

bedeutet „für die gilt" oder „mit der Eigenschaft"

↓

{Ausdruck mit Variablen | Bedingungen für die Variablen}

↗ ↖

einzelne Variable (z. B. n) oder Term (z. B. y^2)
zusätzliche Voraussetzung (z. B. $x \in \mathbb{R}$)
andere Ausdrücke (z. B. ein Paar $(a; b)$)

Aussage, die die Variablen enthält
(z. B. $n < 5$ und $n \neq 0$)

Für die Variablen kann man beliebige Objekte einsetzen und überprüfen, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Wenn die Aussage gilt, sind die Objekte selbst oder der entsprechende Ausdruck Elemente der Menge.

Beispiel: Die Menge aller Quadratzahlen lässt sich auf verschiedene Weisen angeben:
$\{1; 4; 9; 16; 25; 36; \ldots\}$ oder $\{a^2 \,|\, a \in \mathbb{N}\}$ oder $\{x \,|\, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$.
Mit $\mathbb{N}$ ist dabei die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ gemeint. Allgemein gibt es für bestimmte Zahlenmengen fest definierte Abkürzungen:

Menge der **natürlichen Zahlen**:	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Menge der **ganzen Zahlen**:	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$
Menge der **rationalen Zahlen**:	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$
	$= \{x \,|\, x$ lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen$\}$
Menge der **reellen Zahlen**:	$\mathbb{R} = \{x \,|\, x$ lässt sich als endliche, periodische oder unendliche Dezimalzahl darstellen$\}$
	$= \{x \,|\, x$ ist eine Zahl auf dem Zahlenstrahl$\}$
Menge der **komplexen Zahlen**:	$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

Hinweis: Manchmal wird in der Literatur auch die 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt.

1. Welche Objekte sind in folgenden Mengen enthalten?
   a) $\{a \,|\, a$ ist Standort der Ostfalia$\}$
   b) $\{b \,|\, b$ ist eine Primzahl$\}$
   c) $\{(c; d) \,|\, d \in \mathbb{N}$ und $c = 2d\}$

Zwei Mengen A und M heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente enthalten, Schreibweise $A = M$.
Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge M, falls jedes Element aus A auch in M enthalten ist, Schreibweise $A \subseteq M$.
Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von M, wenn $A \subseteq M$ und $A \neq M$ gilt, Schreibweise $A \subset M$.

2. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1; 2; 3\}$.

3. Übersetzen Sie in Mengenschreibweise.
   a) „Die Menge A besteht aus den Elementen 1, 2 und 3."
   b) „Die Menge B besteht aus den Elementen x, für die $x^2 - 1 = 0$ gilt."
   c) „Die Menge C besteht aus den natürlichen Zahlen, die 20 ohne Rest teilen."

d) „Die Menge D besteht aus den möglichen Ergebnissen beim Würfeln.“

4. Welche Zahlen werden durch die folgenden Mengen beschrieben?

   a) $U = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$

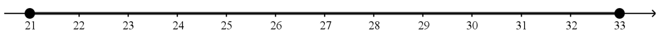
   b) $Q = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$

   c) $M = \{u \in \mathbb{N} \,|\, 21 \leq u \leq 33\}$

   d) $R = \{u \in \mathbb{R} \,|\, 21 \leq u \leq 33\}$

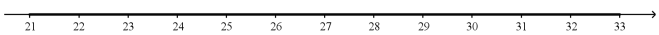
Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen **Intervalle**. Sie lassen sich auch kürzer in Intervallschreibweise darstellen. Dabei wird nur die untere und die obere Grenze angegeben, alle reellen Zahlen dazwischen sind Elemente des Intervalls/der Menge.
Für die Menge R aus Aufgabe 4d) bietet sich diese Schreibweise an:

$$R = \{u \in \mathbb{R} \,|\, 21 \leq u \leq 33\} = [21; 33]$$



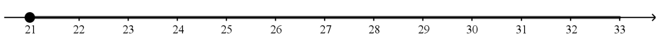
Dies nennt man ein **abgeschlossenes Intervall**.
Möchte man die Menge R nun ohne die Grenzen 21 und 33 betrachten, handelt es sich um ein **offenes Intervall**. Hierfür werden runde Klammern () oder nach außen geöffnete eckige Klammern][verwendet:

$$\{u \in \mathbb{R} \,|\, 21 < u < 33\} =]21; 33[= (21; 33)$$

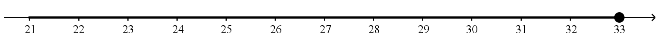


Entsprechend gibt es auch halboffene Intervalle, die an einer Seite offen und an der anderen geschlossen sind:

$$\{u \in \mathbb{R} \,|\, 21 \leq u < 33\} = [21; 33[= [21; 33)$$



$$\{u \in \mathbb{R} \,|\, 21 < u \leq 33\} =]21; 33] = (21; 33]$$



Auch Mengen wie $M_1 = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u \leq 4\}$ oder $M_2 = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u > 5\}$ lassen sich als Intervall darstellen. Man verwendet als Intervallgrenze „∞“ bzw. „$-\infty$“. Da „∞“ und „$-\infty$“ keine reellen Zahlen sind, muss das Intervall an der entsprechenden Seite offen sein:

$$M_1 = (-\infty; 4] \qquad \text{und} \qquad M_2 = (5; \infty)$$

Terme kann man durch Rechenoperationen wie Addition oder Multiplikation miteinander verknüpfen. Auch für Mengen gibt es solche Operationen:

- Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die in A oder in B enthalten sind,
  Schreibweise: $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Sprechweise: A **vereinigt** B
- Der **Schnitt** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die sowohl in A als auch in B enthalten sind,
  Schreibweise: $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\}$ Sprechweise: A **geschnitten** B
- Die **Differenz** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die in A aber nicht in B enthalten sind,
  Schreibweise: $A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\}$ Sprechweise: A **ohne** B

5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{1; -1\}$.
   Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$.

6. Geben Sie die folgenden Mengen an.
   a) „Die Menge A besteht aus den Elementen der Menge M und dem Element 2.“
   b) „Die Menge B besteht aus allen reellen Zahlen außer 0.“

Die Mengenschreibweise wird unter anderem verwendet, um Lösungen von Gleichungen und Ungleichungen als Elemente der sogenannten **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ anzugeben. Insbesondere unendlich viele oder gar keine Lösungen lassen sich so formal korrekt darstellen.
Die Menge aller Zahlen, für die die Gleichung definiert ist, fasst man auch zu einer Menge zusammen, der sogenannten **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$.
Auch bei den Funktionen werden uns die Mengen wieder begegnen.

Man kann mathematische Objekte wie Terme, Mengen oder Aussagen vergleichen oder verknüpfen. Die entsprechenden Relationen oder Operationen sind nur für bestimmte Objekte definiert, zum Beispiel „$\leq$“ oder „$+$“ nur für Terme, „$\cup$“ nur für Mengen usw.
Die folgende Tabelle zeigt wichtige Symbole und ihre Verwendung.

Objekte	Relationen	Symbol		Operationen	Symbol
Terme	gleich	$=$		Addition	$+$
	kleiner	$<$		Subtraktion	$-$
	kleiner oder gleich	$\leq$		Multiplikation	$\cdot$
	größer	$>$		Division	$:$
	größer oder gleich	$\geq$			
Mengen	gleich	$=$		Vereinigung	$\cup$
	Teilmenge von	$\subseteq$		Schnitt	$\cap$
	echte Teilmenge von	$\subset$		Differenz	$\setminus$
Aussagen	Äquivalenz, „genau dann wenn“	$\Longleftrightarrow$		und	$\wedge$
	Implikation, „daraus folgt“	$\Longrightarrow$		oder	$\vee$

3.2 Gemischte Übungsaufgaben zu Mengen

1. Schreiben Sie jeweils auf zwei verschiedene Arten.
   a) Die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar, größer als 10 und kleiner als 25 sind.
   b) Alle reellen Zahlen zwischen (nicht einschließlich) $\frac{2}{3}$ und $\frac{19}{3}$.
   c) Das rechts halboffene Intervall zwischen x und y, wobei $x < y$ ist.
   d) Alle reellen Zahlen von einschließlich -3 bis einschließlich 415.

2. Beschreiben Sie in Worten, welche Mengen gemeint sind.
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+2)(x+1) = 0\}$

3. Fassen Sie zusammen.
   a) $(4;7) \cup [3;5] =$
   b) $(4;7) \cap [3;5] =$
   c) $(4;7) \setminus [3;5] =$

3.3 Gleichungen und Äquivalenzumformungen

1. Was verstehen Sie unter einer Gleichung?

Im Rahmen von Termumformungen steht das Gleichheitszeichen immer zwischen zwei Termen mit gleichem Wert. Bei der Betrachtung von Gleichungen und Gleichungsumformungen kann das Gleichheitszeichen auch zwischen Termen mit verschiedenen Werten stehen:

Verbindet man zwei beliebige Terme T_1 und T_2 durch ein Gleichheitszeichen, so erhält man eine **Gleichung**: $T_1 = T_2$

Eine Gleichung ist eine wahre Aussage, wenn beide Terme den gleichen Wert haben und eine falsche Aussage, wenn sie nicht den gleichen Wert haben.
Bei Gleichungen mit einer Variablen hängt dies in der Regel davon ab, was man für die Variable einsetzt. Beispielsweise ist die Aussage

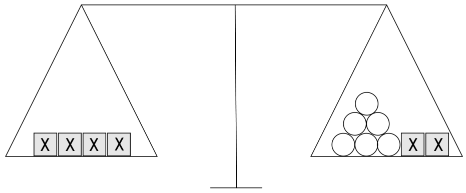
$$2x + 3 = 4x$$

nur für $x = \frac{3}{2}$ wahr, für alle anderen Werte ist sie falsch. $\frac{3}{2}$ nennt man dann **Lösung** dieser Gleichung.
Allgemein nennt man einen Term (in der Regel eine Zahl) eine **Lösung** einer Gleichung, wenn sich beim Einsetzen des Terms für die Variable eine wahre Aussage ergibt.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung heißt **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ dieser Gleichung. Wenn es keine Lösung gibt, gilt $\mathbb{L} = \{\}$.
Bei Gleichungen mit mehreren Variablen kann man Lösungsmengen bezüglich einer oder mehrerer Variablen bestimmen.
Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, kann man die Gleichung in vielen Fällen so umformen, dass man die Lösungen direkt ablesen kann. Dazu muss die gesuchte Variable alleine auf einer Seite stehen und darf auf der anderen Seite nicht mehr vorkommen. Dazu benutzt man meist sogenannte **Äquivalenzumformungen**:

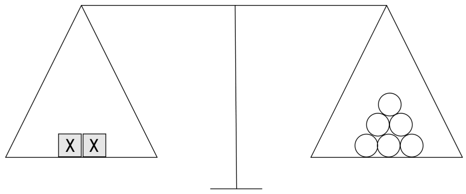
Formt man eine Gleichung so um, dass sich die Lösungsmenge nicht verändert, so spricht man von einer **Äquivalenzumformung**. Um deutlich zu machen, dass man eine Äquivalenzumformung angewendet hat, schreibt man das Symbol $\Longleftrightarrow$ vor die neu erhaltene Gleichung.

Äquivalenzumformungen können mit dem Modell einer Waage veranschaulicht werden, deren Gleichgewicht sich nicht ändert, wenn auf beiden Seiten das Gleiche gemacht wird.

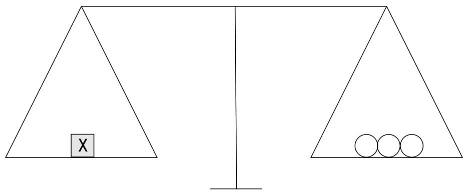
Beispiel:



Auf jeder Seite $2x$ wegnehmen ergibt:



Das Gewicht auf beiden Seiten halbieren ergibt:



Analog kann man die entsprechenden Gleichungen umformen:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & 4x & = & 6+2x & \mid -2x \\
\Longleftrightarrow & 4x-2x & = & 6+2x-2x & \mid \text{Terme zusammenfassen} \\
\Longleftrightarrow & 2x & = & 6 & \mid :2 \\
\Longleftrightarrow & x & = & 3 &
\end{array}
$$

Jede dieser vier Gleichungen hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3\}$.

2. Erläutern Sie an einem Beispiel, warum die Multiplikation mit Null keine Äquivalenzumformung ist.

3. Wer rechnet richtig?

   Student A rechnet:

   $$\begin{aligned} && 3x &= 4x && \mid :x \\ \iff && \frac{3x}{x} &= \frac{4x}{x} && \\ \iff && 3 &= 4 && \end{aligned}$$

   Also ist $\mathbb{L} = \{\}$.

   Student B rechnet:

   $$\begin{aligned} && 3x &= 4x && \mid -3x \\ \iff && 3x-3x &= 4x-3x && \\ \iff && 0 &= x && \end{aligned}$$

   Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

4. Lösen Sie die Gleichung $\frac{2-2x}{1-x} = 2x$, indem Sie zunächst den Bruch auf der linken Seite der Gleichung kürzen. Worauf müssen Sie dabei achten?

5. Erläutern Sie, warum das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist.

Sie haben bislang folgende Äquivalenzumformungen kennengelernt:

Äquivalenzumformungen

Bei folgenden Umformungen ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht:

- Bei Addition oder Subtraktion einer Zahl oder allgemein eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung.
- Bei Multiplikation oder Division einer Zahl oder allgemein eines Terms ungleich Null auf beiden Seiten der Gleichung.

Typische Fehler bei Äquivalenzumformungen

6. Beachten Sie, dass im Folgenden **falsch** ausgeführte Äquivalenzumformungen dargestellt sind. Beschreiben Sie jeweils den Fehler und schreiben Sie die korrekte Umformung auf die rechte Seite.

a) $$\begin{aligned} 3x &= 26 \quad |-3 \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 23 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x+3 &= 4 \quad |:2 \\ \Longleftrightarrow \quad x+3 &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5(x+15) &= 150 \quad |:5 \\ \Longleftrightarrow \quad x+3 &= 30 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 6x^2+4x+14 &= -8x \quad |+8x \\ \Longleftrightarrow \quad 6x^2-4x+14 &= 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 6x^2+4x+14 &= -8x \quad |+8x \; :2 \\ \Longleftrightarrow \quad 3x^2+12x+7 &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 140a+70 &= \frac{35}{x} \quad |:35 \\ \Longleftrightarrow \quad 4a+2 &= x \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x^2 &= 625 \quad |\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 25 \end{aligned}$$

Die korrekte Vorgehensweise beim Lösen verschiedener Arten von Gleichungen wird ausführlich unter anderem in den Kapiteln 4, 8 und 9 besprochen.

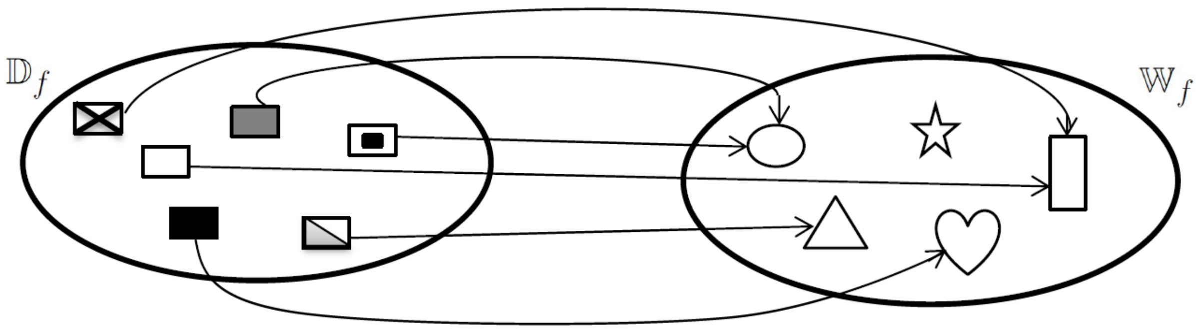
3.4 Funktionen

Unter einer **Funktion** f versteht man eine **eindeutige** Zuordnung, die jedem Element x einer **Definitionsmenge** $\mathbb{D}_f$ genau ein Element y einer **Wertemenge** $\mathbb{W}_f$ zuordnet. Man schreibt:

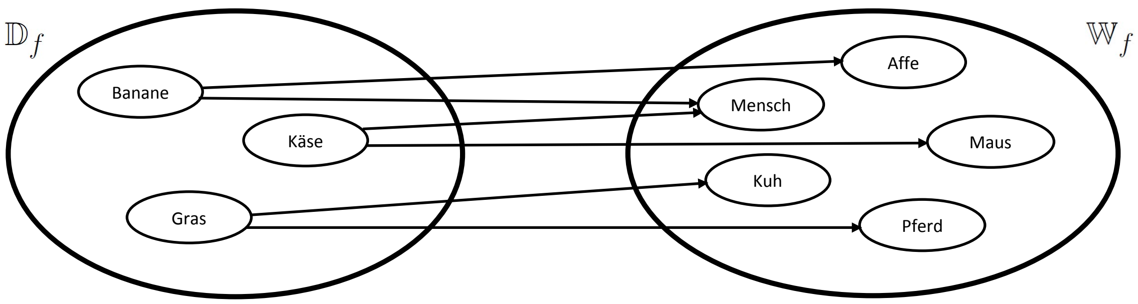
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto y \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} f\colon \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Man sagt: Die Funktion f bildet x auf y (bzw. auf $f(x)$) ab. Dabei nennt man x das **Urbild** von $f(x) = y$ und $f(x) = y$ das **Bild** oder den **Funktionswert** von x unter der Funktion f.
Die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ nennt man auch **Definitionsbereich**, die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ heißt auch **Wertebereich**.

Beispiel:



1. Ist die folgende Zuordnung eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.



2. Welche der folgenden Zuordnungen sind Funktionen? Geben Sie für die Funktionen jeweils eine geeignete Definitions- und Wertemenge an.
   a) Studierenden der Ostfalia wird ihr Alter in Jahren zugeordnet.

   b) Einem Datum werden alle, die an diesem Tag geboren sind, zugeordnet.

   c) Verheirateten Männern wird jeweils die Ehepartnerin/der Ehepartner zugeordnet.

   d) Jede Zahl wird sich selbst zugeordnet.

   e) Jeder Lehrveranstaltung werden die Wochentage zugeordnet, an denen sie stattfindet.

   f) Einer natürlichen Zahl n werden die reellen Zahlen w zugeordnet, für die $w^2 = n$ gilt.

   g) Jeweils zwei Orten wird ihre Entfernung voneinander zugeordnet.

Im folgenden werden meist sogenannte **reelle Funktionen** betrachtet:

Funktionen, deren Definitions- und Wertemengen entweder $\mathbb{R}$ oder Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, nennt man **reelle Funktionen**.
Bei einer reellen Funktion

$$f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f,\ x \mapsto f(x) = y$$

nennt man x die **unabhängige Variable** und y die **abhängige Variable**.

Reelle Funktionen werden häufig durch eine **Funktionsgleichung** $f(x) = \ldots$ oder $y = \ldots$ beschrieben, wobei ... für einen Term steht, der von x abhängt (den **Funktionsterm**).
Zum Beispiel wird die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ beschrieben, wobei x^2 der Funktionsterm ist.

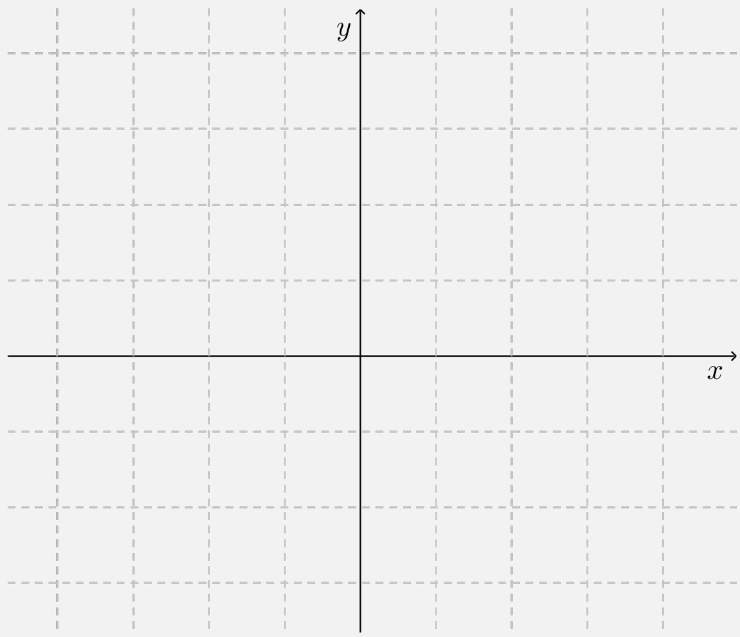
Eine weitere übliche Darstellung reeller Funktionen ist die Darstellung als **Graph**. Man kann eine Funktion f als Menge von geordneten Paaren $(x, f(x))$ auffassen. Den **Graphen** der Funktion f erhält man durch Einzeichnen dieser Paare als Punkte in ein Koordinatensystem. Dabei wird die unabhängige Variable x auf der waagerechten Achse und die abhängige Variable $f(x) = y$ auf der senkrechten Achse abgetragen.
Um den Graphen einer Funktion zu zeichnen, kann es hilfreich sein, eine Wertetabelle anzulegen. Hierzu berechnet man zu einigen $x \in \mathbb{D}_f$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$, indem man die jeweiligen Werte von x in den Funktionsterm einsetzt. Anschließend notiert man x und $f(x)$ in der Wertetabelle.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$.

   a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion f. Begründen Sie Ihre Antwort.

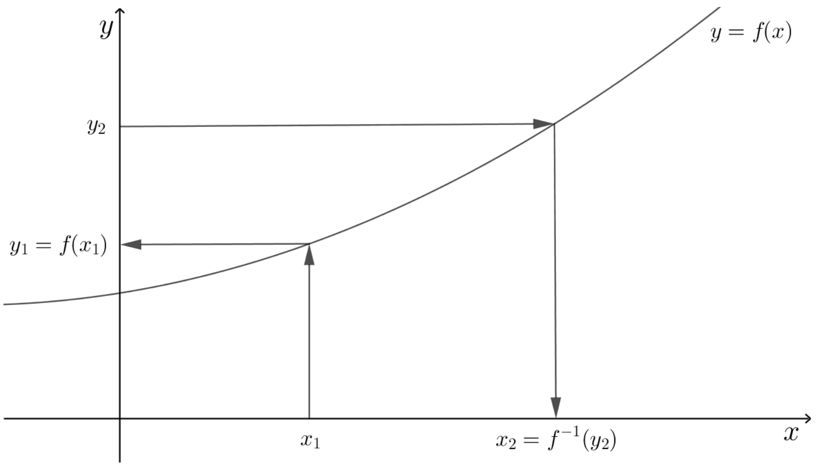
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

x	$y = f(x)$



Umkehrfunktionen

Für eine gegebene Funktion f kann man zu jedem $x \in \mathbb{D}_f$ den zugehörigen Funktionswert $f(x) \in \mathbb{W}_f$ bestimmen. In vielen Situationen möchte man auch umgekehrt das zu einem gegebenen Funktionswert $y \in \mathbb{W}_f$ gehörige Urbild $x \in \mathbb{D}_f$ bestimmen.



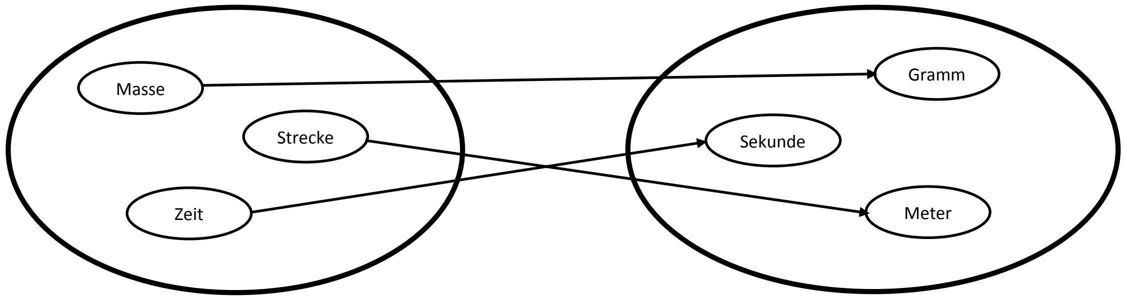
Wenn möglich wird dieser umgekehrte Zusammenhang ebenfalls als Funktion dargestellt:

Wenn es zu jedem Funktionswert $y = f(x)$ einer Funktion f genau ein Urbild x gibt, dann ist die umgekehrte Zuordnung, welche jedem Funktionswert $f(x)$ sein Urbild x zuordnet, eindeutig und somit wieder eine Funktion. Diese Funktion nennt man **Umkehrfunktion** und bezeichnet sie mit f^{-1}. Die Funktion f heißt dann **umkehrbar**.
Gibt es hingegen für einen Funktionswert y einer Funktion f mehr als ein Urbild, d. h. es gibt mindestens zwei verschiedene Werte x_1 und x_2 mit dem gleichen Funktionswert $y = f(x_1) = f(x_2)$, so ist die Funktion f **nicht umkehrbar**.

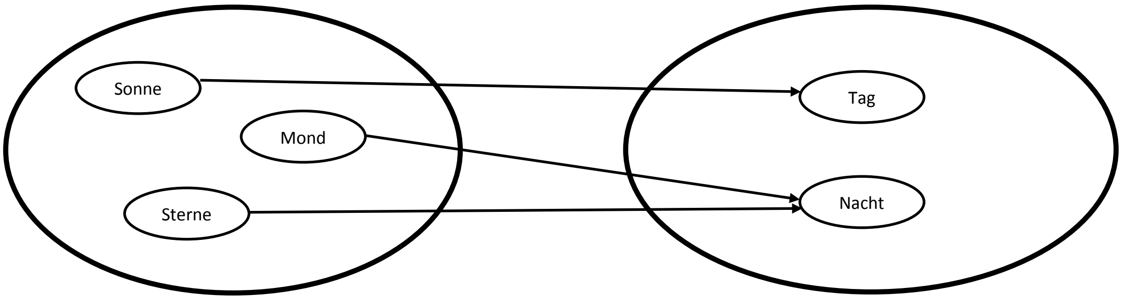
Beispiel: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht umkehrbar, da unter anderem -1 und 1 denselben Funktionswert $1 = 1^2 = (-1)^2$ haben.

4. Gegeben sind die Funktionen f und g:

$$f\colon \{\text{Masse; Strecke; Zeit}\} \to \{\text{Gramm; Sekunde; Meter}\}$$



$$g\colon \{\text{Sonne; Mond; Sterne}\} \to \{\text{Tag; Nacht}\}$$

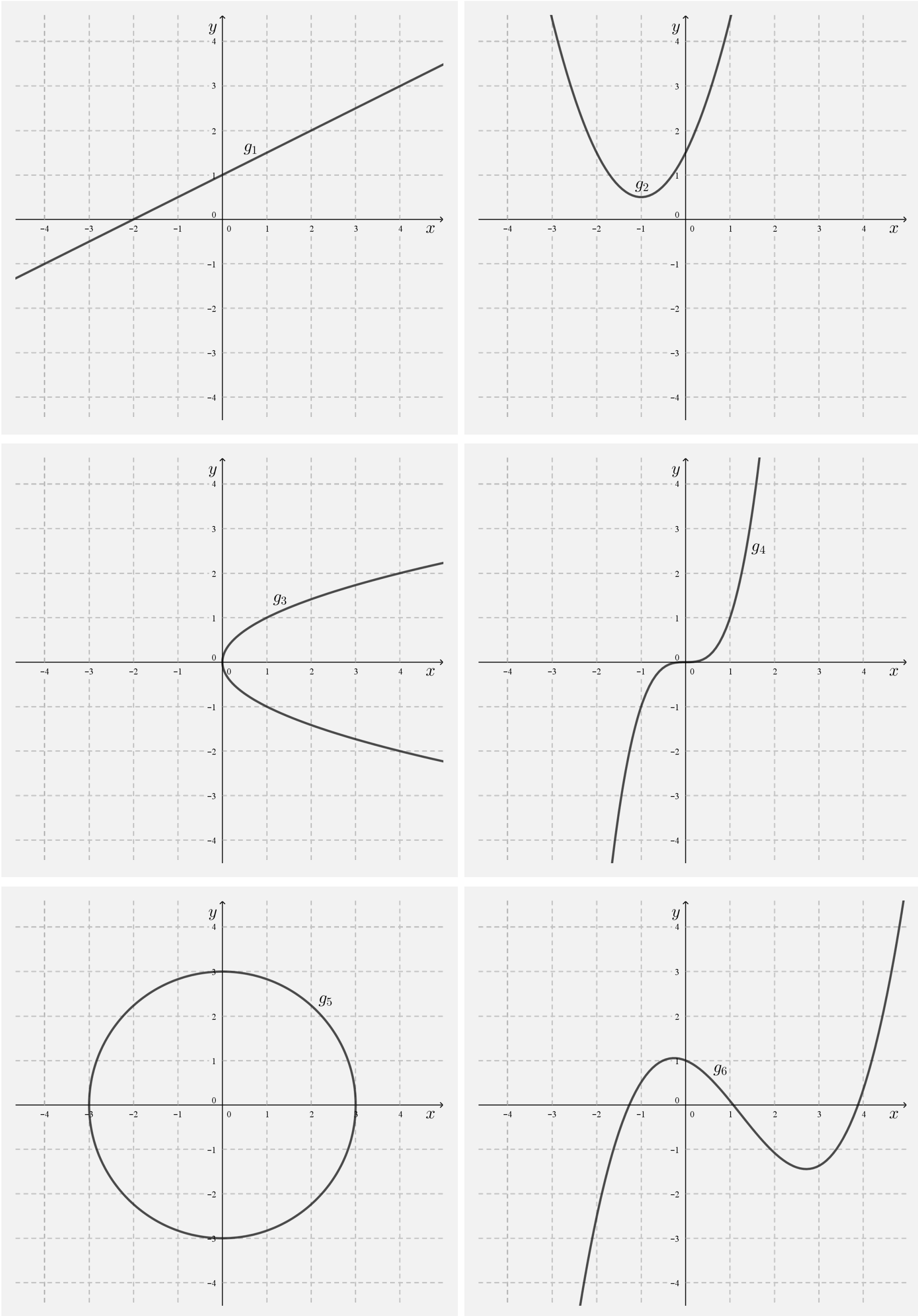


a) Ist f umkehrbar? Ist g umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Beschreiben Sie, wie man in diesem Beispiel die Umkehrfunktion erhält.

5. Welche der Funktionen aus Aufgabe 2 sind umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. a) Welche der folgenden Graphen sind Graphen einer Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.



b) Welche der Funktionen aus Teil a) sind umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie erkennen Sie am Graphen einer Funktion f, dass f umkehrbar (bzw. nicht umkehrbar) ist?

Das Bilden einer Umkehrfunktion entspricht dem Vertauschen der Rollen von abhängiger Variable und unabhängiger Variable. Im Koordinatensystem bedeutet das eine Vertauschung von x- und y-Koordinate.
Für die Graphen der Funktionen heißt das:
Liegt zum Beispiel der Punkt $(1;2)$ auf dem Graphen von f, so liegt der Punkt $(2;1)$ auf dem Graphen von f^{-1}. Man erhält den Punkt $(2;1)$ durch Spiegelung von $(1;2)$ am Graphen der Funktion $y = x$. Diese Funktion wird auch als **Winkelhalbierende** bezeichnet.
Allgemein heißt das, dass sich der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ ergibt.

7. Zeichnen Sie in die Koordinatensysteme von Aufgabe 6a) die zugehörigen Umkehrfunktionen ein (falls diese existieren). Zeichnen Sie dazu jeweils zunächst die Winkelhalbierende $y = x$.

Um die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1} zu ermitteln, löst man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf. Man erhält eine Gleichung der Form $x = f^{-1}(y)$. Um die übliche Notation zu erhalten, vertauscht man x und y. Aus $x = f^{-1}(y)$ wird $y = f^{-1}(x)$. Übungsaufgaben dazu finden Sie im Kapitel 4.3.

4 Lineare Gleichungen und Funktionen

4.1 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heißt **linear bezüglich $\boldsymbol{x}$**, wenn sie sich durch Addition oder Subtraktion von Termen auf beiden Seiten der Gleichung in die Form

$$ax + b = 0$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ bringen lässt. Man nennt a den **Koeffizienten** von x.

1. Welche der folgenden Gleichungen sind linear bezüglich x? Bringen Sie die linearen Gleichungen in die Form $ax + b = 0$.

   a) $(x+1)^2 = 16$

   b) $3x + xv = 2xu^2$

   c) $3(x+v) - u(x+4) = v$

   d) $(x+2)(x-u) = 7$

   e) $\sqrt{x+2} = x + 3$

Um eine lineare Gleichung zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:

(1) Multiplizieren Sie die Klammern aus, die die gesuchte Variable enthalten.

(2) Formen Sie die Gleichung durch geeignete Additionen bzw. Subtraktionen so um, dass alle Summanden mit der gesuchten Variablen auf einer Seite und alle anderen Summanden auf der anderen Seite der Gleichung stehen!

(3) Fassen Sie die Terme zusammen bzw. klammern Sie die gesuchte Variable aus.

(4) Teilen Sie durch den entstandenen Koeffizienten.

(5) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

Zur Überprüfung empfiehlt es sich, die Probe zu machen. Dafür setzt man den berechneten Wert in die Ursprungsgleichung ein und überprüft, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $4(3-a) = -1-3(5-a)$.

		$4(3-a) = -1-3(5-a)$	$\mid$ ausmultiplizieren
(1)	$\iff$	$12-4a = -1-15+3a$	$\mid -3a-12$
(2)	$\iff$	$-4a-3a = -1-15-12$	$\mid$ zusammenfassen
(3)	$\iff$	$-7a = -28$	$\mid : (-7)$
(4)	$\iff$	$a = 4$	
(5)	Also ist $\mathbb{L} = \{4\}$.		

Probe: Einsetzen von $a = 4$ in die Ursprungsgleichung ergibt $4(3-4) = -1-3(5-4) \iff -4 = -4$, also eine wahre Aussage. Damit ist $a = 4$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $8u = au + b$ bezüglich u mit $a \neq 8$.

		$8u = au + b, \quad a \neq 8$	$\mid -au$
(2)	$\iff$	$8u - au = b$	$\mid u$ ausklammern
(3)	$\iff$	$u(8-a) = b$	$\mid : (8-a)$
(4)	$\iff$	$u = \dfrac{b}{8-a}$	
(5)	Also ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{b}{8-a}\right\}$.		

2. Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen die Lösungsmenge bezüglich x.

   a) $5(x-2) + 4(4+x) = 1$

   b) $-2(x-7) = 6(1+x) - 4(1+2x)$

c) $0{,}5x - 3 = 0{,}5(3(x-1) - (2x+3))$

d) $x(5a-2) - 2ax = a(3x+11) - 9(-3-2x), \quad a \in \mathbb{R}$

e) $17x - 2a = 13 - 2xa, \quad a \neq -8{,}5$

f) $bx + 4 = ax - \frac{1}{2}x, \quad a - b \neq \frac{1}{2}$

4.2 Gemischte Übungsaufgaben zu linearen Gleichungen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. Machen Sie eine Probe.
   a) $5x + 12 = 72$
   b) $6x + 2 = 4x + 20$
   c) $6x + 5x - 15 = x + 5$
   d) $5x + 2 = 20 - x$
   e) $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$
   f) $x + 4 = 9x - (5 - x)$
   g) $3(5 - 2x) = 10 - x + 5(1 - x)$
   h) $2{,}6(x - 1) = -6{,}5(x + 1) - \frac{1}{2}(x - 7{,}8)$
   i) $7(4x - 3) + 3(7 - 8x) = 1$
   j) $6x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x)$
   k) $2(7 - x) = 5(3 - x) - 1 + 3x$
   l) $2(7 - x) = 5(3 - x) + 3x$
   m) $(x - 7)(x + 3) = x(x + 2) + 5$
   n) $(x - 2)(3x - 1) = 3(x + 1)x - 2(5x + 1)$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen bezüglich x.
   a) $2x + 2 = 4x + 2a, \quad a \in \mathbb{R}$
   b) $xt + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2, \quad t \neq \frac{1}{2}$
   c) $x(3 - y) = z(2y - x) - y(x - z), \quad y, z \in \mathbb{R}, z \neq -3$

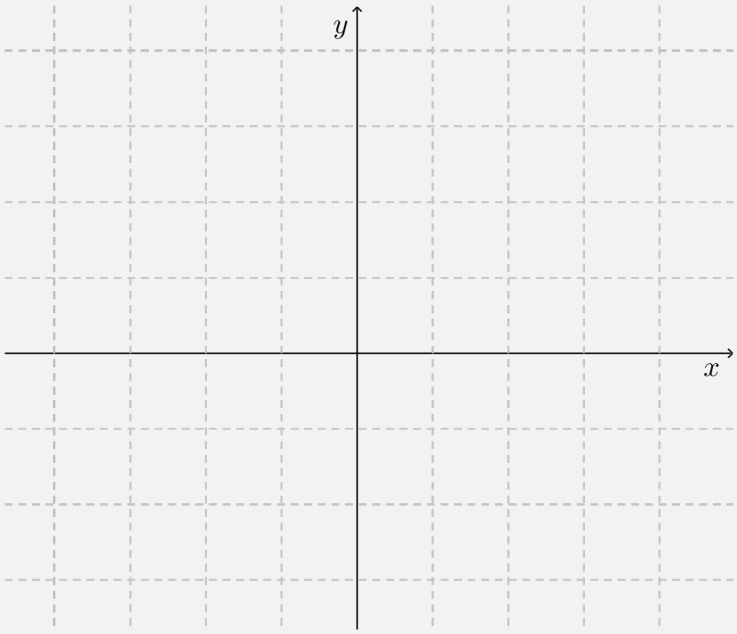
4.3 Lineare Funktionen

Fasst man einen linearen Term der Form $mx+b$ als Funktion auf, so erhält man eine lineare Funktion:

Funktionen der Form $f(x) = mx + b$, mit $m, b \in \mathbb{R}$ heißen **lineare Funktionen**.

1. a) Zeichnen Sie den Graphen der linearen Funktion $f(x) = 2x + 1$.

x	$y = f(x)$

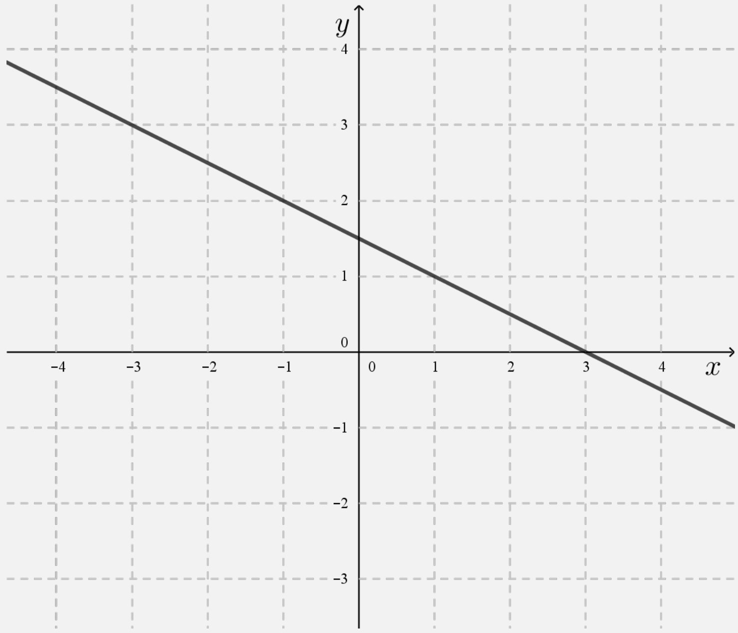


b) Welche Bedeutung hat der Faktor 2 und welche der Summand 1 in der obigen Funktionsgleichung?

c) Wie helfen Ihnen die Größen m und b beim Zeichnen des Graphen der linearen Funktion $f(x) = mx + b$?

d) Zeichnen Sie den Graphen der linearen Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$ in das obige Koordinatensystem.

2. a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion f, die durch den folgenden Graphen dargestellt wird.



b) Wie kann man aus dem Graphen einer beliebigen linearen Funktion die dazugehörige Funktionsgleichung bestimmen?

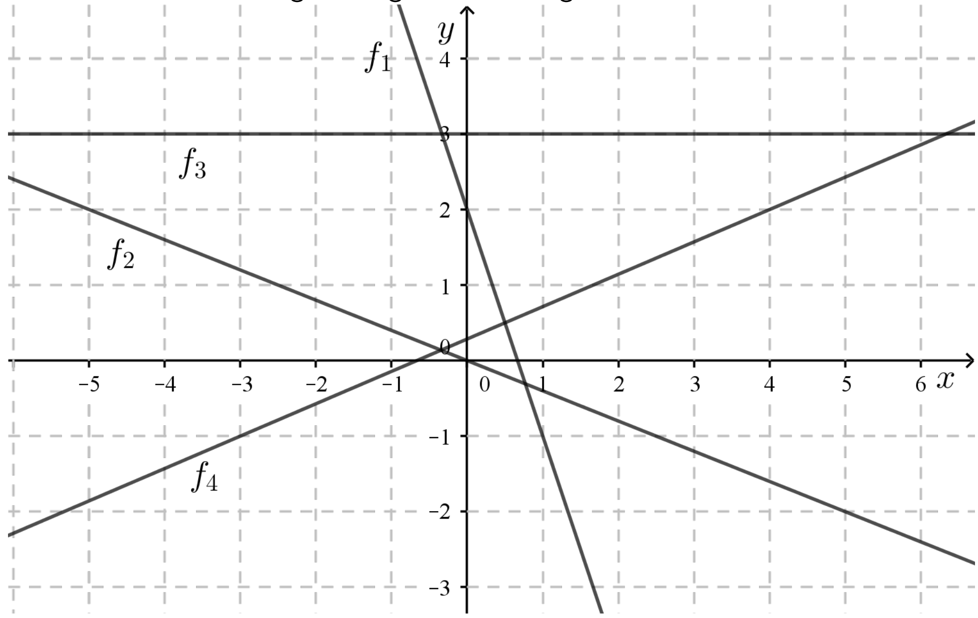
c) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von f in das obige Koordinatensystem und geben Sie die dazugehörige Funktionsgleichung an.

d) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion rechnerisch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

3. Die Stadtwerke bieten für ihre Kunden einen Stromtarif an, der sich aus einem Arbeitspreis von $0{,}25$ € pro Kilowattstunde und einem Grundpreis von $10{,}50$ € pro Monat zusammensetzt.
   a) Stellen Sie die Funktionsgleichung für die monatlichen Gesamtkosten auf. Geben Sie eine geeignete Definitionsmenge an.
   b) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion.
   c) Berechnen Sie die monatlichen Gesamtkosten für einen Verbrauch von 650 kWh.
   d) Welche Funktion ordnet den monatlichen Gesamtkosten den Verbrauch zu?

4.4 Gemischte Übungsaufgaben zu linearen Funktionen

1. Geben Sie die Funktionsgleichungen zu den folgenden linearen Funktionen an.



2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2}{5}x - 1$.
   a) Legen Sie Definitionsmenge und Wertemenge fest.
   b) Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.
   c) Berechnen Sie $f^{-1}(f(x))$ und $f(f^{-1}(x))$.

3. Die Preisabsatzfunktion $p(x)$ eines Gutes beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Preis p und der abgesetzten Menge x eines Gutes. Ein Betrieb stellt ein Produkt mit der Preisabsatzfunktion $p(x) = 40 - 2x$ her.
   a) Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge an.
   b) Wie viel wird bei einem Preis von 10 € abgesetzt?

4. Temperaturen werden in den USA üblicherweise nicht in Celsius (°C), sondern in Fahrenheit (°F) angegeben. Als Nullpunkt der Fahrenheit-Skala wurde nicht der Gefrierpunkt von Wasser, sondern die Temperatur eines bestimmten Eis-Wasser-Gemisches festgelegt. 0 °C entsprechen 32 °F, 100 °C entsprechen 212 °F.
   a) Ein Thermometer zeigt 20 °C an. Wie viel °F sind das?
   b) Geben Sie allgemeine Formeln an, mit denen Sie Temperaturen von °C in °F umrechnen können und umgekehrt.
   c) Die höchste je in den USA gemessene Temperatur wurde am 10.07.1913 im Death Valley in Kalifornien mit 134 °F gemessen. Wie viel °C sind das?

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Graphische Darstellung

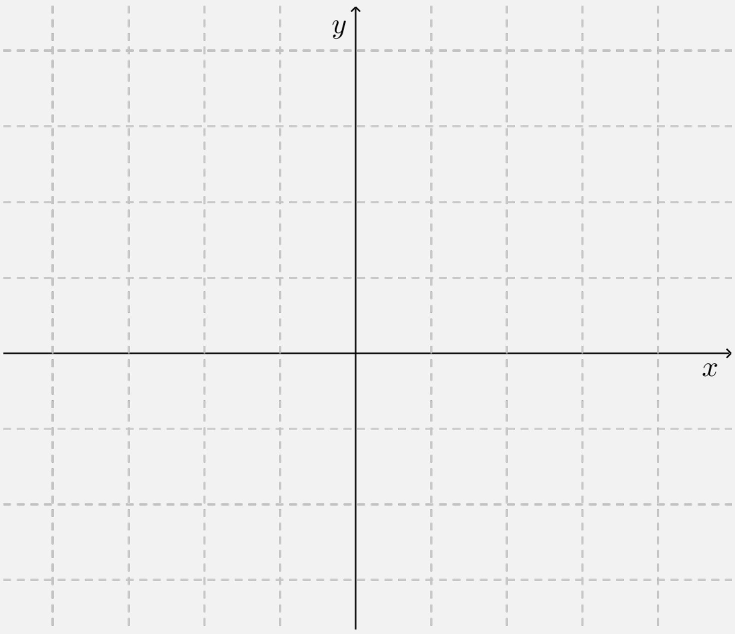
Eine Gleichung mit mehreren Variablen heißt **linear**, wenn sie linear bezüglich jeder auftretenden Variablen ist. Eine lineare Gleichung mit 2 Variablen x und y hat die **allgemeine Form**

$$ax + by + c = 0$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung enthält geordnete Paare (x, y) und kann graphisch dargestellt werden. Löst man die Gleichung nach einer Variablen auf, zum Beispiel y, erhält man eine Gleichung der Form $y = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$. Diese kann man als Funktionsgleichung einer linearen Funktion auffassen.

1. Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2x + y - 5 = 0$ graphisch dar.

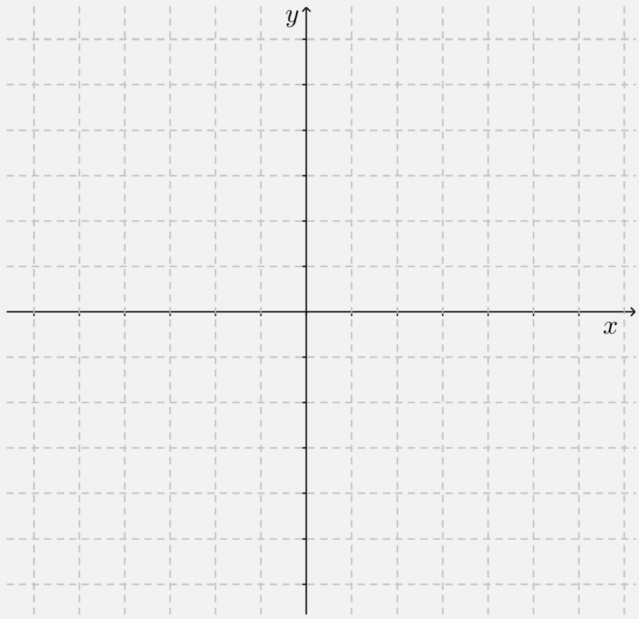


2. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte $P_1 = (2; 1)$; $P_2 = (1; 2)$; $P_3 = \left(\frac{1}{3}; \frac{13}{3}\right)$ und $P_4 = \left(-\frac{1}{2}; 9\right)$ auf der Geraden $y = -2x + 5$ liegen.

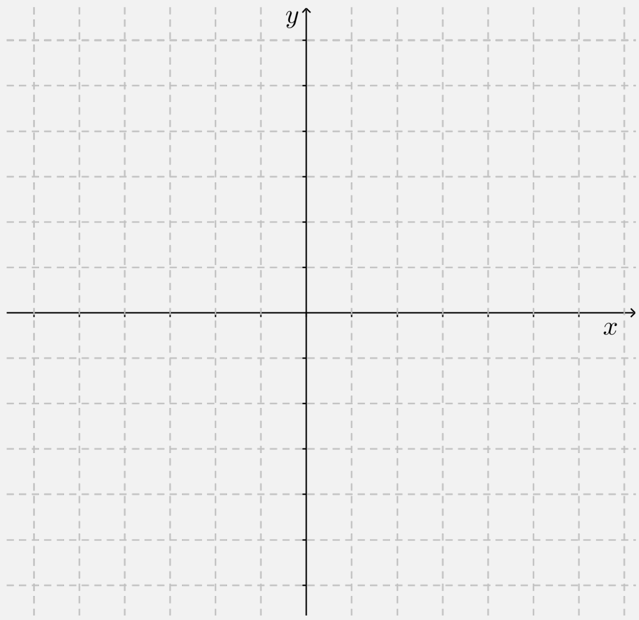
Nun werden zwei Geraden in der Ebene betrachtet.

3. Berechnen Sie - wenn möglich - jeweils den Schnittpunkt der beiden Geraden und stellen Sie die beiden Geraden in einem Koordinatensystem graphisch dar.

a)
$$g_1 : y = 3x + 2$$
$$g_2 : y = -4x + 2$$



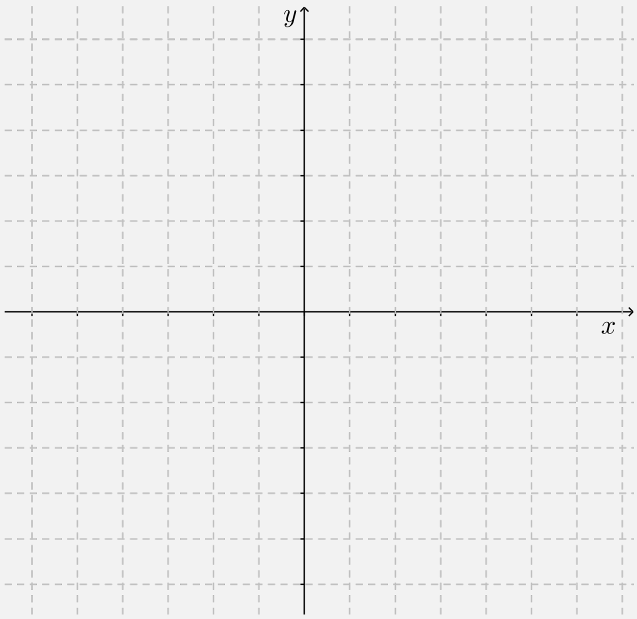
b)
$$g_3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$g_4 : y = -0{,}5x - 2$$



c)

$$g_5 : y = -2x + 1$$

$$g_6 : y = 5 - 0{,}5x - 4 - 1{,}5x$$



4. Wie können zwei Geraden in einer Ebene zueinander liegen? Wie viele Punkte haben sie jeweils gemeinsam?

5.2 Lösen von linearen Gleichungssystemen

Werden mehrere lineare Gleichungen mit n Variablen zusammen betrachtet, so bezeichnet man eine solche Zusammenfassung als ein **lineares Gleichungssystem** (LGS). Lösung eines solchen Gleichungssystems sind n Werte $x_1, \ldots, x_n$, für die sich beim Einsetzen in alle Gleichungen jeweils eine wahre Aussage ergibt. Sie werden als sogenannte n-Tupel $(x_1; \ldots; x_n)$ notiert.

1. Bestimmen Sie Werte für x und y, so dass die folgenden Paare von Gleichungen erfüllt sind. Überlegen Sie, wie man die Lösungsmenge angeben könnte.

   a)

   $$\begin{aligned} 2x + 3 &= y \\ y &= 6x + 1 \end{aligned}$$

   b)

   $$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

   c)

   $$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

2. Sind Sie bei der Lösung von a) - c) unterschiedlich vorgegangen? Begründen Sie Ihr Vorgehen.

3. a) Wie kann man sich ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen graphisch vorstellen?

   b) Wie viele Lösungen kann ein solches lineares Gleichungssystem haben?

4. Wie ändert sich die Anzahl der Lösungen, wenn ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen
   a) nur aus einer Gleichung besteht,

   b) aus drei oder mehr Gleichungen besteht?

5.3 Gaußscher Eliminationsalgorithmus

1. Betrachten Sie folgende Gleichungssysteme. Welches lässt sich Ihrer Meinung nach mit dem wenigsten Arbeitsaufwand lösen, für welches ist am meisten Arbeitsaufwand nötig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 3z & = & 1 \\ & & 13y & + & 1z & = & -10 \\ & & & & 6z & = & 18 \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 6x & + & 5y & - & 5z & = & -8 \\ 5x & - & 3y & - & 2z & = & 7 \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & & & = & 6 \\ & & 13y & & & = & -13 \\ & & & & 6z & = & 18 \end{array}$$

Der Algorithmus von Gauß ist ein systematisiertes Lösungsverfahren für beliebig große lineare Gleichungssysteme.
Betrachten Sie als Beispiel das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I}: & 7x & + & 3y & - & 5z & = & -12 \\ \text{II}: & -x & - & 2y & + & 4z & = & 5 \\ \text{III}: & -4x & + & y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

Gesucht werden Lösungstripel $(x; y; z)$, die alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, eine **Zeilenstufenform** bzw. **obere Dreiecksform** wie in Aufgabe 1a) zu erzeugen. Dazu darf man:

- Zeilen vertauschen
- Zeilen mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren
- Zeilen durch eine Zahl $\neq 0$ dividieren
- Zeilen addieren und subtrahieren

Ebenfalls dürfen unter Beachtung der zugehörigen Variablen auch Spalten vertauscht werden.
Um Schreibarbeit zu sparen, werden beim Gauß-Algorithmus nur die Koeffizienten wie folgt notiert:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 7 & 3 & -5 & -12 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{array} \quad \text{Ziel der Umformung} \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}$$

Im Folgenden wird das LGS mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gelöst:

	Rechenschema				**Was passiert bis zum nächsten Schritt?**	
	x	y	z			
I	7	3	-5	-12	I $\rightleftharpoons$ II	Vertauschen der ersten und zweiten Zeile
II	-1	-2	4	5		
III	-4	1	-3	1		
I	-1	-2	4	5		
II	7	3	-5	-12	$+7\cdot$ I	zu der zweiten Zeile das 7-fache der ersten addieren
III	-4	1	-3	1	$-4\cdot$ I	von der dritten Zeile das 4-fache der ersten subtrahieren
I	-1	-2	4	5		
II	0	-11	23	23	$\cdot 9$	zweite Zeile mit 9 multiplizieren
III	0	9	-19	-19	$\cdot 11$	dritte Zeile mit 11 multiplizieren
I	-1	-2	4	5		
II	0	-99	207	207		
III	0	99	-209	-209	+II	zur dritten Zeile die zweite addieren
I	-1	-2	4	5		
II	0	-99	207	207		
III	0	0	-2	-2		

Das Vertauschen der ersten und zweiten Zeile im ersten Schritt wird durchgeführt, um eine -1 in der oberen linken Ecke zu erhalten. Eine solche Ausgangssituation ist komfortabler, da man so leichter erkennt, welches Vielfache dieser Zeile zur zweiten oder dritten Zeile addiert oder subtrahiert werden muss, um die notwendigen Nullen zu erzeugen.
Aus der erreichten oberen Dreiecksform kann nun durch direktes Ablesen bzw. Rückwärtseinsetzen die Lösung für x, y und z wie folgt bestimmt werden:

letzte Zeile: $-2z = -2$ also $z = 1$

zweite Zeile: $-99y + 207z = 207$

Einsetzen von $z = 1$: $-99y + 207 = 207$

$\iff -99y = 0$ also $y = 0$

erste Zeile: $-x - 2y + 4z = 5$

Einsetzen von $z = 1, y = 0$: $-x - 0 + 4 = 5$ also $x = -1$

Somit lautet die Lösung $(-1; 0; 1)$ und die Lösungsmenge für das LGS $\mathbb{L} = \{(-1; 0; 1)\}$.

2. Hat ein lineares Gleichungssystem immer genau eine Lösung?

3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5a & + & 15b & + & 10c & = & 15 \\ -4a & - & 9b & - & 5c & = & -6 \\ a & + & 5b & + & 6c & = & 15. \end{array}$$

a) Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an, um eine obere Dreiecksform zu erhalten.

b) Was bedeutet das für die Lösung?

4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & c & = & 9 \\ 2a & + & 2b & - & 2c & = & 0 \\ 3a & - & b & - & c & = & 10. \end{array}$$

a) Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an, um eine obere Dreiecksform zu erhalten.

b) Was bedeutet das für die Lösung?

5. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 3a & + & 2b & + & c & = & 3 \\ 2a & + & b & & & = & 2. \end{array}$$

a) Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an, um eine obere Dreiecksform zu erhalten.

b) Was bedeutet das für die Lösung?

5.4 Gemischte Übungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

   a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 6u & - & 12v & + & 18w & = & 12 \\ u & + & v & - & 3w & = & 11 \\ -2u & + & v & + & 2w & = & -15 \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{rcrcr} 3s & - & 3t & = & -6 \\ 2s & + & t & = & 5 \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{rcrcrrcr} 2a & + & 4b & - & 6c & +2d & = & 36 \\ a & - & b & + & 3c & -2d & = & -12 \\ 2a & - & b & + & 8c & +d & = & -6 \\ -a & - & b & + & 4c & +5d & = & 4 \end{array}$$

   d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2a & + & 2b & + & c & = & 4 \\ 3a & + & 3b & + & 2c & = & 5 \end{array}$$

   e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 4y & + & 5z & = & 16 \\ 2x & - & 3y & - & z & = & -7 \\ 4x & - & 6y & - & 2z & = & -14 \end{array}$$

   f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2a & + & 4b & + & 5c & = & 9 \\ 2a & - & 3b & - & c & = & 5 \\ 4a & - & 6b & - & 2c & = & 7 \end{array}$$

2. Drei Zechbrüder wollen die gemeinsame Rechnung bezahlen. Keiner hat soviel Geld bei sich, dass er die Zeche allein begleichen kann. Nimmt jedoch der Erste zu seinem Geld $\frac{1}{3}$ von dem des Zweiten, oder der Zweite zu seinem Geld die Hälfte von dem des Ersten, oder der Dritte zu seinem Geld $\frac{3}{4}$ von dem des Ersten, so wäre die Rechnung beglichen.
   Zusammen besitzen die Herren 45 €.

   a) Wie viel Geld besitzt jeder Einzelne?

   b) Wie hoch war die Rechnung?

3. Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna?

4. Silvia ist genau 25 Jahre jünger als ihre Mutter. In 7 Jahren wird die Mutter 5 mal so alt sein wie Silvia. Wo ist Silvias Vater?

6 Bruchgleichungen

6.1 Bruchgleichungen

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable im Nenner von Brüchen vorkommt, nennt man **Bruchgleichungen**.

Bei Bruchgleichungen kann es passieren, dass ein Nenner für bestimmte Werte Null wird. Diese Werte müssen ausgeschlossen werden. Deshalb ist es sinnvoll, eine Definitionsmenge $\mathbb{D}$ anzugeben, die alle Werte enthält, die in die Gleichung eingesetzt werden dürfen.

Hinweis: Beachten Sie den Unterschied zwischen Definitionsmenge und Lösungsmenge: Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ enthält alle Werte, für die alle Terme in der Gleichung definiert sind. Man erhält also eine Aussage. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ enthält nur die Werte, für die diese Aussage auch wahr ist, also auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens das Gleiche steht.

Um eine Bruchgleichung zu lösen, ist es in der Regel hilfreich, beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner des Bruches zu multiplizieren, damit dieser sich wegkürzt. Gibt es in der Gleichung mehrere Brüche, multipliziert man am besten mit dem Hauptnenner. Vorher sollte immer so weit wie möglich gekürzt werden.

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x}{2(x+2)} - \frac{x-2}{5(x+2)} = 4$.

Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned}
& & \frac{x}{2(x+2)} - \frac{x-2}{5(x+2)} &= 4 & &\mid \cdot 2 \cdot 5 \cdot (x+2),\ \text{kürzen} \\
&\iff & 5x - 2(x-2) &= 40(x+2) & &\mid \text{ausmultiplizieren} \\
&\iff & 5x - 2x + 4 &= 40x + 80 & &\mid -40x - 4 \\
&\iff & -37x &= 76 & &\mid : (-37) \\
&\iff & x &= -\frac{76}{37} & &
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{76}{37} \right\}$

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $6 + \frac{1}{2-x} = 3x + \frac{1}{2-x}$.

Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned}
& & 6 + \frac{1}{2-x} &= 3x + \frac{1}{2-x} & &\mid -\frac{1}{2-x} \\
&\iff & 6 &= 3x & &\mid : 3 \\
&\iff & 2 &= x & &
\end{aligned}$$

Weil $x = 2$ nicht in der Definitionsmenge liegt, ist $\mathbb{L} = \{\}$

1. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{-3x+6}{2x-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{3}{2}$ und machen Sie die Probe.

6.2 Gemischte Übungsaufgaben zu Bruchgleichungen

1. Bestimmen Sie die Definitionsmengen und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. Machen Sie eine Probe .
   a) $\frac{3}{2x-1}=5$
   b) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0$
   c) $\frac{2+x}{x-1}=\frac{3+2x}{x+1}-1$
   d) $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{5}=\frac{3}{1-x}+\frac{8}{5}$
   e) $\frac{2}{3x-4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{6x-8}$
   f) $\frac{32}{8x+16}=\frac{5x}{2x+4}$
   g) $\frac{6-2x}{x^2-9}=\frac{3}{2}$

2. Durch welche Zahl muss man in Aufgabe 1g) $\frac{3}{2}$ ersetzen, so dass die sonst unveränderte Gleichung die Lösung $x=-1$ hat?

3. Überprüfen Sie folgende Behauptung.

$$\frac{2x^2+4x-30}{2x-6}=x+5 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

7 Potenzen und Wurzeln

Der Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist die folgende Beziehung:

$$b^n = a$$

Dabei geht es bei der **Potenzrechnung** um die Bestimmung von a und bei der **Wurzelrechnung** um die Bestimmung von b. Bei der **Logarithmusrechnung** (siehe Kapitel 9) geht es um die Bestimmung von n.

7.1 Potenzrechnung

Ähnlich wie $5 \cdot 2$ eine Kurzschreibweise für $2+2+2+2+2$ ist, handelt es sich bei 2^5 um eine Kurzschreibweise für $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Der Term 2^5 bedeutet, dass der Faktor 2 fünfmal mit sich selbst multipliziert wird.

Bezeichnungen:

$$\textbf{Wert der Potenz} \rightarrow a = \underset{\nwarrow\,\textbf{Basis}}{b}^{\overset{\textbf{Exponent}}{\swarrow} n}$$

Im Folgenden werden zunächst nur Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten betrachtet.

1. Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

Kurzschreibweise	ausführliche Schreibweise	Ergebnis
7^3	$7 \cdot 7 \cdot 7$	343
5^2		
1^6		
9^1		
0^4		
$(-2)^4$		
-2^4		
b^3		

2. Ergänzen Sie.

Häufig vorkommende Potenzwerte

Zweierpotenzen:

$2^1 =$	$2^2 =$	$2^3 =$	$2^4 =$	$2^5 =$
$2^6 =$	$2^7 =$	$2^8 =$	$2^9 =$	$2^{10} =$

Dreierpotenzen:

$3^1 =$	$3^2 =$	$3^3 =$	$3^4 =$	$3^5 =$

Fünferpotenzen:

$5^1 =$	$5^2 =$	$5^3 =$	$5^4 =$

Quadratzahlen:

$1^2 =$	$2^2 =$	$3^2 =$	$4^2 =$	$5^2 =$
$6^2 =$	$7^2 =$	$8^2 =$	$9^2 =$	$10^2 =$
$11^2 =$	$12^2 =$	$13^2 =$	$14^2 =$	$15^2 =$

3. a) Berechnen Sie.

$(-1)^1 =$

$(-1)^2 =$

$(-1)^3 =$

$(-1)^4 =$

b) Für welche Werte von n gilt $(-1)^n = 1$, für welche gilt $(-1)^n = -1$?

4. a) Berechnen Sie.

$(-a)^1 =$

$(-a)^2 =$

$(-a)^3 =$

$(-a)^4 =$

b) Für welche Werte von n gilt $(-a)^n = a^n$, für welche gilt $(-a)^n = -a^n$?

5. Ergänzen Sie die folgende Aussage.

„Eine Potenz mit einer negativen Basis ist positiv, wenn der Exponent ______ ist, und negativ, wenn der Exponent ______ ist.“

Für bestimmte Fälle gibt es Rechenregeln, die den Umgang mit Potenzen erleichtern. Zunächst soll es um ein Produkt aus zwei Potenzen mit gleicher Basis gehen. Zum Beispiel ist

$$2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Faktoren}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{(5+3) \text{ Faktoren}} = 2^{5+3} = 2^8.$$

Diese Überlegungen lassen sich nun auf den allgemeinen Fall $b^n \cdot b^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ übertragen:

$$b^n \cdot b^m = \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{(n+m) \text{ Faktoren}} = b^{n+m}.$$

Man multipliziert also zwei Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.

6. Nutzen Sie ein ähnliches Vorgehen, um die folgenden in Textform gegebenen Terme umzuformen. Welche Rechenregeln nutzen Sie? Formulieren Sie Ihr Ergebnis als Formel und in Worten.

   a) Einen Quotienten aus zwei Potenzen mit gleicher Basis

   b) Ein Produkt aus zwei Potenzen mit gleichen Exponenten

   c) Einen Quotienten aus zwei Potenzen mit gleichen Exponenten

d) Eine Potenz, die potenziert wird

Allgemein gelten:

Die Potenzrechenregeln

Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $b, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden und die Basis erhalten bleibt:
$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

2. Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden und die Basis erhalten bleibt.
$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}, \quad b \neq 0$$

3. Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden und der Exponent erhalten bleibt.
$$b^n \cdot d^n = (b \cdot d)^n$$

4. Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem die Basen dividiert werden und der Exponent erhalten bleibt.
$$\frac{b^n}{d^n} = \left(\frac{b}{d}\right)^n, \qquad d \neq 0$$

5. Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden und die Basis erhalten bleibt.
$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

Diese Regeln gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten (siehe Aufgabe 10) und Potenzen mit rationalen Exponenten und positiver Basis (siehe Aufgabe 6 im Kapitel Wurzelrechnung).

7. Formen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Potenzrechenregeln um, wenn möglich. Geben Sie jeweils an, welche Regel Sie benutzt haben.

   a) $a^3 \cdot a^4 =$

   b) $a^5 + a^2 =$

   c) $(a^3)^4 =$

   d) $b^7 + b^7 =$

   e) $(4a)^3 =$

   f) $(3 + a)^2 =$

   g) $\frac{2^5}{2^4} =$

   h) $\frac{5^2}{3^2} =$

   i) $\frac{(-2)^{128}}{2^{127}} =$

8. Mark rechnet: $a^n \cdot a^n = (a \cdot a)^n$.
   Holger hingegen rechnet: $a^n \cdot a^n = a^{n+n}$.
   Wer rechnet richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

9. Mark behauptet: „7^0 bedeutet, dass ich die 7 nullmal mit sich selbst multipliziere. Keine 7 bedeutet also, man hat nichts. Damit muss Null herauskommen.“
   Nehmen Sie zu Marks Behauptung Stellung.
   (Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel die Potenz 7^{5-5} und die Potenzrechenregeln)

10. a) Vereinfachen Sie den Term $\frac{7^5}{7^8}$, indem Sie so weit wie möglich kürzen.

b) Was erhalten Sie, wenn Sie auf den Term aus dem letzten Aufgabenteil eine geeignete Potenzrechenregel anwenden?

c) Was stellen Sie fest?

d) Wofür ist a^{-n} eine Kurzschreibweise?

Allgemein gilt:

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Die Potenzrechenregeln gelten auch für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

11. Berechnen Sie.

a) $2^3 \cdot 3^2 =$

b) $3^5 \cdot 9^{-2} =$

c) $(-5)^3 =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e) $2^9 \cdot 2^{-7} =$

f) $3^{13} \cdot 9^{-3} \cdot 27^{-2} =$

g) $2^{(2^3)} \cdot (-2)^{-4} =$

h) $625 \cdot (5^8 + 5^9)^{-1} =$

7.2 Wurzelrechnung

Bislang wurden nur Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten betrachtet. Im Folgenden werden auch rationale Zahlen als Exponenten zugelassen.

Die **Quadratwurzel** $\sqrt{a} = b$ einer nichtnegativen Zahl a ist die nichtnegative Zahl b, die mit sich selbst multipliziert a ergibt: $b \cdot b = a$.

Beispielsweise ist $\sqrt{9} = 3$, weil $3 \cdot 3 = 9$ ist. In vielen Fällen ist die Quadratwurzel einer Zahl aber nicht als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellbar. So ist zum Beispiel $\sqrt{5} = 2{,}2361\ldots$ Solche Zahlen sind auch nicht als Bruch darstellbar. Sie heißen irrationale Zahlen und sind eine Teilmenge der reellen Zahlen.

1. Warum kann man die Quadratwurzel nicht aus einer negativen Zahl ziehen?

Neben den Quadratwurzeln gibt es noch weitere Wurzeln:

Die ***n*-te Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ einer nichtnegativen Zahl a ist diejenige nichtnegative Zahl b, die n-mal mit sich selbst multipliziert a ergibt: $b^n = a$.
Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man auch $\sqrt{a}$.
<u>Bezeichnungen:</u>

Wurzelexponent

Wert der Wurzel $\rightarrow b = \sqrt[n]{a}$

Radikand

<u>Hinweis:</u> Man kann auch ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen zulassen. Beispielsweise ist $(-2)^3 = -8$, somit wäre $\sqrt[3]{-8} = -2$. Da der Umgang damit in der Literatur aber nicht einheitlich geregelt ist, wird in diesem Kurs auf deren Benutzung verzichtet.

2. Berechnen Sie. Dabei sei $x \geq 0$.
   a) $\sqrt{7^2} =$
   b) $\sqrt{(-7)^2} =$
   c) $\sqrt[3]{15^3} =$
   d) $\sqrt{x^2} =$
   e) $\sqrt[n]{x^n} =$
   f) $(\sqrt[n]{x})^n =$

Wurzeln kann man auch in Potenzschreibweise darstellen. Zur Vorbereitung dienen die folgenden zwei Aufgaben.

3. Bestimmen Sie x.
   a) $5^x = 5^3$
   b) $3^x = 9$
   c) $2^x = 8$
4. Wann haben zwei Potenzen mit gleicher Basis den gleichen Wert?
5. Nutzen Sie die vorherige Aufgabe und die Potenzrechenregeln, um x herzuleiten ($a > 0$).
   a) $4^x \cdot 4^x = 4$
   b) $a^x \cdot a^x = a$
   c) $\sqrt{a} = a^x$
   d) $8^x \cdot 8^x \cdot 8^x = 8$
   e) $a^x \cdot a^x \cdot a^x = a$
   f) $\sqrt[3]{a} = a^x$
   g) $\sqrt[n]{a} = a^x$

Wurzeln als Potenzen

Jede Wurzel mit nichtnegativem Radikanden lässt sich als Potenz schreiben, wobei der Exponent der Kehrwert des Wurzelexponenten ist:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

6. Die Potenzrechenregeln gelten grundsätzlich auch für rationale Exponenten. Was muss man dabei beachten?

7. Berechnen Sie.

   a) $4^{\frac{1}{2}} =$

   b) $4^{-\frac{1}{2}} =$

   c) $9^{\frac{3}{2}} =$

   d) $\left(47^{\frac{2}{3}}\right)^3 =$

   e) $3^{1{,}4} \cdot 3^{0{,}6} =$

   f) $\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$

8. Nutzen Sie die Potenzrechenregeln, um die Rechenregeln für Wurzeln zu ergänzen (a, $b > 0$).

   a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$

   b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$

   c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$

   d) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} =$

   e) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} =$

9. Vereinfachen Sie.

   a) $\sqrt{28} =$

   b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$

   c) $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9} =$

   d) $\sqrt[13]{1{,}3^9} \cdot \sqrt[13]{1{,}3^4} =$

   e) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{9^3}} =$

   f) $\dfrac{\sqrt[10]{5120}}{\sqrt[10]{5}} =$

   g) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{4^{-8}}} =$

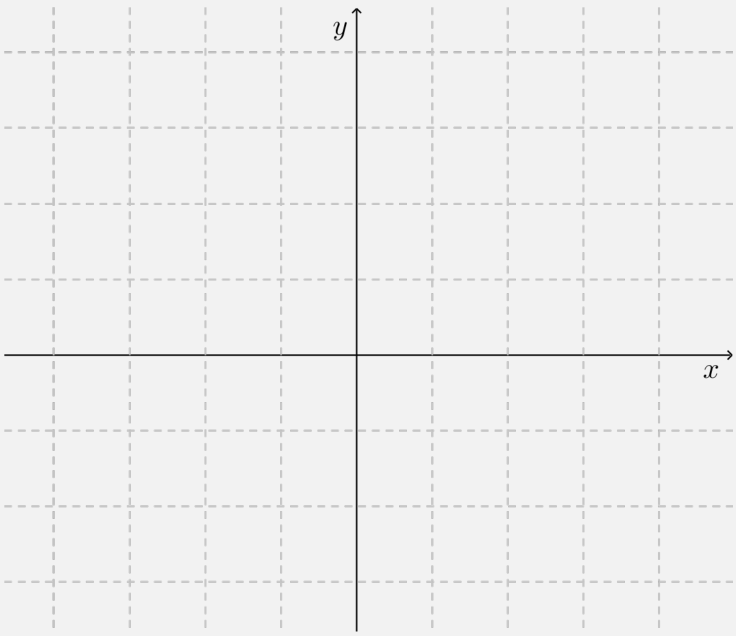
7.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Funktionen der Form $f(x) = x^n$ mit einer natürlichen Zahl n heißen **Potenzfunktionen**.

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Potenzfunktionen.

   a) $f_1(x) = x^2$ b) $f_2(x) = x^3$

x	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$



Funktionen der Form $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit einer natürlichen Zahl n heißen **Wurzelfunktionen**.

2. Zeichnen Sie die Graphen der Wurzelfunktionen $f_3(x) = \sqrt{x}$ und $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$ in das obige Koordinatensystem.

3. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge von $f_3(x)$ und $f_4(x)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

<u>Hinweis:</u> So wie Wurzelziehen und Potenzieren **Umkehroperationen** zueinander sind, so sind Wurzelfunktion und Potenzfunktion **Umkehrfunktionen** zueinander. Die Definitionsmenge der Potenzfunktion muss bei geraden Exponenten eingeschränkt werden, damit die Umkehrfunktion gebildet werden kann.

Dass Wurzelfunktion und Potenzfunktion Umkehrfunktionen zueinander sind, kann unter anderem beim Lösen von Gleichungen genutzt werden. Tritt in einer Gleichung die gesuchte Variable beispielsweise nur in der dritten Potenz auf, so kann diese Gleichung durch das Ziehen der dritten Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gelöst werden. Vorher sollte die Gleichung mit Äquivalenzumformungen so umgeformt werden, dass die Potenz mit der Variablen alleine auf einer Seite der Gleichung steht.

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Was müssen Sie beachten?
   a) $x^2 - 36 = 0$
   b) $2x^3 - 54 = 0$
   c) $x^4 + 625 = 0$
5. 🖩 Von einer Bakterienpopulation in einem Experiment ist bekannt, dass sie sich nach jeder Stunde um den gleichen Faktor erhöht. Wie groß ist dieser Faktor, wenn die Bakterienpopulation zu Beginn aus $10\,000$ Bakterien bestand und nach vier Stunden schon $234\,256$ Bakterien vorhanden sind?
6. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x} = 9$

Gleichungen, bei denen die gesuchte Variable wie in der letzten Aufgabe im Argument einer Wurzel steht, heißen **Wurzelgleichungen**. Die Vorgehensweise beim Lösen solcher Gleichungen wird in Kapitel 12.2 besprochen.

7.4 Gemischte Übungsaufgaben zu Potenzen und Wurzeln

1. Vereinfachen Sie - wenn möglich - die folgenden Ausdrücke ($x, y, a, b > 0$).

   a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} =$

   b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{5}} =$

   c) $\dfrac{12^7 \cdot 11^6}{33^5 \cdot 2^{15}} =$

   d) $\sqrt{a^2 + b^2} =$

   e) $\sqrt{(a+b)^2} =$

   f) $\sqrt{x^2 a + x^2 b} =$

   g) $\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt[3]{x^{21}a + x^{21}b}}{\sqrt[3]{a+b}}} =$

   h) $\dfrac{a^2 \cdot b^{-1}}{a^3 \cdot b^2} =$

   i) $\sqrt{a} \cdot a =$

   j) $\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^2 =$

   k) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} =$

   l) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[12]{a}} =$

   m) $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}}\right)^6} =$

   n) $\dfrac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}} =$

   o) $\dfrac{(8x^3y^{-3})^{-2}}{(12x^{-2}y^{-4})^{-3}} =$

   p) $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) =$

   q) $(\sqrt{a+b} - \sqrt{b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{b}) =$

   r) $(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3})(1 - \sqrt{x}) =$

2. Machen Sie den Nenner rational ($a, b > 0$). Hinweis: Erweitern Sie mit Hilfe der 3. binomischen Formel so, dass im Nenner keine Wurzeln mehr stehen.

   a) $\dfrac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$

   b) $\dfrac{2b}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} =$

   c) $\dfrac{b}{a - \sqrt{a^2 - b}} =$

3. ▦ Das Müllaufkommen einer Stadt steigt jährlich um einen festen Prozentsatz. In zwei Jahren ist die Müllmenge um $8{,}16\,\%$ gestiegen. Wie groß ist die jährliche, prozentuale Zunahme des Müllaufkommens?

8 Quadratische Gleichungen und Funktionen

8.1 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung heißt **quadratisch bezüglich x**, wenn sie sich durch Addition oder Subtraktion von Termen auf beiden Seiten der Gleichung in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bringen lässt. Diese Form wird die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung genannt. Durch Division dieser Gleichung mit a erhält man die **normierte Form**

$$x^2 + px + q = 0.$$

Quadratische Gleichungen müssen anders gelöst werden als lineare Gleichungen. Im Folgenden erarbeiten Sie sich die Herangehensweise für Spezialfälle sowie für den allgemeinen Fall.

1. Bestimmen Sie die Seitenlänge eines Quadrates mit $16\,\text{cm}^2$ Flächeninhalt.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 16$.

3. Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates um $7\,\text{cm}^2$ vergrößert wird, beträgt der neue Flächeninhalt $16\,\text{cm}^2$. Wie lang ist die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates?

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 7 = 16$.

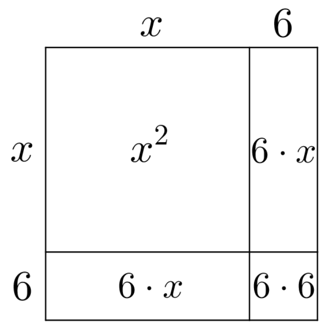
5. a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $(x + 7)^2 = 16$.

b) Kann man die Gleichung $(x+7)^2 - 16 = 9$ auch ohne Ausmultiplizieren lösen?

Die bisher betrachteten Gleichungen haben die Form $(x+a)^2 = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Diese Gleichungen lassen sich lösen, indem man die Wurzel zieht.

6. Kann man die Gleichung $x^2 + 12x = 14$ ähnlich wie die vorhergehenden Gleichungen lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Das Lösen von Gleichungen dieser Art ist auf Grund des linearen Terms $12x$ schwieriger. Mit einer geschickten Addition kann man sie aber in die Form $(x+a)^2 = b$ bringen, welche Sie bereits lösen können. Dieser Trick wird die „**quadratische Ergänzung**“ genannt.
In der Gleichung $x^2 + 12x = 14$ ist $x^2 + 12x = x^2 + 2 \cdot 6x$ Teil eines Binoms, welches durch Addition von 6^2 vollständig gemacht werden kann: $x^2 + 2 \cdot 6x + 36 = (x+6)^2$.
Die binomische Formel kann man sich in diesem Fall wie folgt veranschaulichen:



Die quadratische Ergänzung $6 \cdot 6$ muss aber auf beiden Seiten der Gleichung $x^2 + 12x = 14$ ergänzt werden (Waage !!) oder aber auf der linken Seite sofort wieder abgezogen werden:

$$\underbrace{x^2 + 12x + 36}_{=(x+6)^2} - 36 = 14$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & (x+6)^2 - 36 = 14 && \mid +36 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x+6)^2 = 50 && \mid \sqrt{(\ldots)} \\
\Longleftrightarrow \quad & x + 6 = \sqrt{50} \quad \text{oder} \quad x + 6 = -\sqrt{50} && \\
\text{Schreibweise:} \quad & x + 6 = \pm\sqrt{50} && \mid -6 \\
\Longleftrightarrow \quad & x = -6 \pm \sqrt{50} &&
\end{aligned}$$

Es gibt zwei Lösungen, also ist $\mathbb{L} = \{-6 - \sqrt{50}; -6 + \sqrt{50}\}$.

7. Nutzen Sie die quadratische Ergänzung, um die folgenden Gleichungen zu lösen. Machen Sie anschließend eine Probe.

   a) $x^2 + 2x = 3$

   b) $x^2 - 3x = 4$

   c) $x^2 - 26x + 169 = 0$

   d) $2x^2 - 26x + 80 = 0$

e) $x^2 + 12x + 18 = -76$

f) $x^2 + px + q = 0$

Sie haben hier die allgemeine Formel ("pq-Formel") zur Lösung einer normierten quadratischen Gleichung hergeleitet.

8. Begründen Sie anhand Ihrer Lösung aus Aufgabe 7f), wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ haben kann.

9. a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $(x + 2)(x - 5) = 0$.

   b) Machen Sie eine Probe, indem Sie die Lösungen in die Gleichung einsetzen.

   c) Betrachten Sie die Gleichung und die Lösungen. Was fällt Ihnen auf?

   d) Welche Lösungsmenge bezüglich x hat die Gleichung $(x - a)(x - b) = 0$? Begründen Sie.

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

10. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer Probe.
    a) $(2x + 5)(x + 1) = 0$
    b) $(x - 3)x = 0$

11. Lässt sich der Satz vom Nullprodukt auch auf den Fall $(x - 2)(x - 7) = 14$ übertragen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 kann man auch in der Form $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ darstellen. Man nennt $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ **Linearfaktoren** und die Darstellung $(x - x_1)(x - x_2)$ **Linearfaktorzerlegung** von $x^2 + px + q$.

12. Zerlegen Sie die linken Seiten der folgenden Gleichungen in Linearfaktoren.
    a) $x^2 + 2x - 35 = 0$
    b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

13. Multiplizieren Sie die Linearfaktorzerlegung $(x - x_1)(x - x_2)$ aus. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen x_1, x_2 und p, q in der Gleichung $x^2 + px + q = 0$?

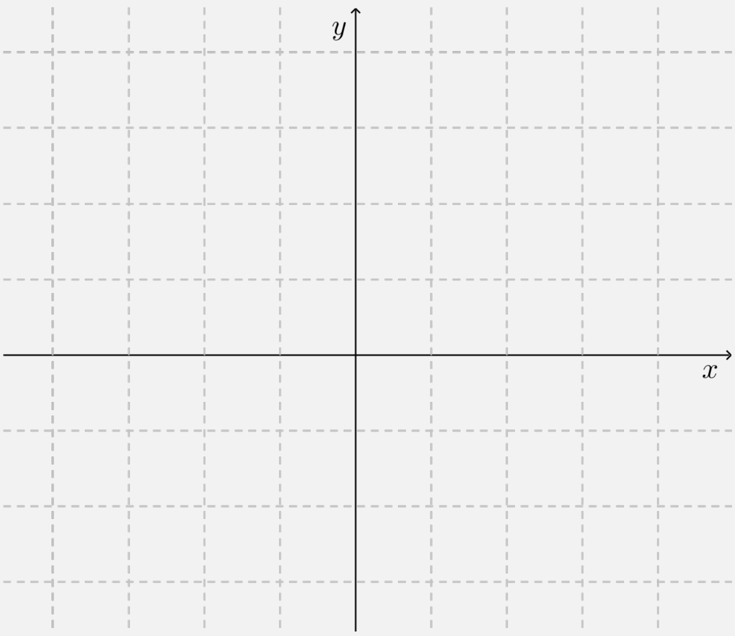
14. Warum wird bei den Linearfaktoren die Lösung subtrahiert und nicht addiert?

8.2 Quadratische Funktionen

Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **quadratische Funktionen**.

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - x - 2$.

x	$y = f(x)$



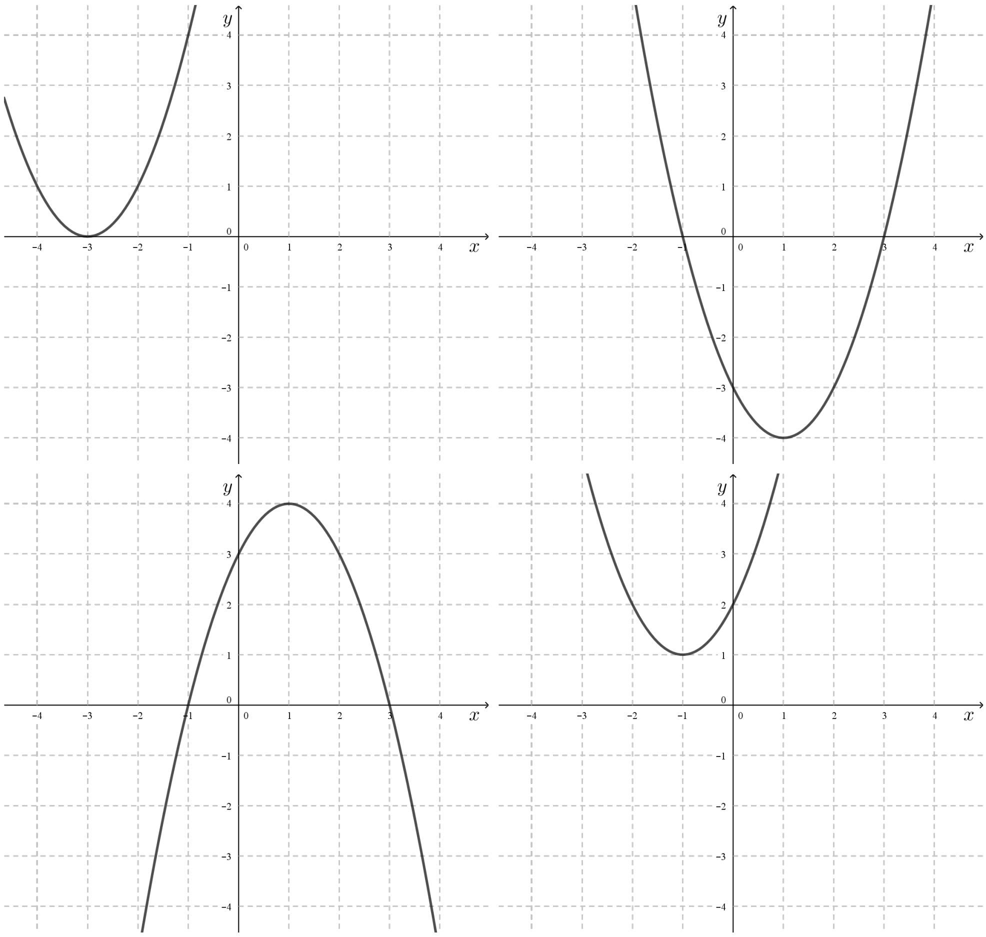
2. Ergänzen Sie den folgenden Text.
Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird als ______ bezeichnet.
Für $a > 0$ ist sie nach ______ geöffnet, für $a < 0$ ist sie nach ______ geöffnet.

Als **Nullstellen** einer Funktion f bezeichnet man die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt. An den Nullstellen schneidet oder berührt der Funktionsgraph von $f(x)$ die x-Achse.

3. Ordnen Sie den folgenden Funktionen ihre Funktionsgraphen zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

   $f_1(x) = -x^2 + 2x + 3$ $\qquad$ $f_3(x) = (x-3)(x+1)$

   $f_2(x) = x^2 + 6x + 9$ $\qquad$ $f_4(x) = x^2 + 2x + 2$



4. Wie viele Nullstellen kann eine quadratische Funktion $f(x)$ haben? Was bedeutet das für die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$?

8.3 Gemischte Übungsaufgaben zu quadratischen Gleichungen und Funktionen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen.
   a) $8x^2 - 50 = 0$
   b) $3x^2 + 19 = 0$
   c) $2x^2 - 8x = 0$
   d) $(3 + x)(5 - 2x) = 0$
   e) $6x \cdot (2x + 5) = 0$
   f) $\frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\right) = 0$
   g) $(x + 4)(x - 2) = 7$
   h) $12x^2 + 2x = 9x^2 + 9x - 2$
   i) $x(3x - 7) = (x + 2)^2 + x - 4$
   j) $5w - 3 - 2w(3w - 4) = 4$
   k) $x(2{,}5x - 2) - 2(x - 1)^2 = \frac{x}{4}(x - 8) - (1{,}5x - 8)^2$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.
   a) $x^2 \cdot (1 - x)(2 + x) = 0$
   b) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 = 0$
   c) $2x^{11} + 3x^{10} = 0$
   d) $x(3 + 2x)(5 - 4x)(8x - 3) = 0$
   e) $2x^3 - 5x^2 = 0$
   f) $3x^5 - x^4 - 2x^3 = 0$
   g) $x^3 - 2x^2 - x = 0$
   h) $16x^5 - 8x^4 + 9x^3 = 0$

3. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. Machen Sie anschließend eine Probe.

$$\frac{2x - 8}{x^2 - 9} + \frac{2x - 5}{x^2 - 3x} = \frac{3x - 4}{x^2 + 3x}$$

4. Die Gewinnfunktion $G(x)$ eines Gutes beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewinn G und der produzierten Menge eines Gutes x. Ein Unternehmen produziert x Tonnen eines Gutes mit der Gewinnfunktion $G(x) = -2x^2 + 46x - 240$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $G(x)$. Für welche Werte von x macht das Unternehmen Gewinn?

9 Exponentialfunktionen und Logarithmen

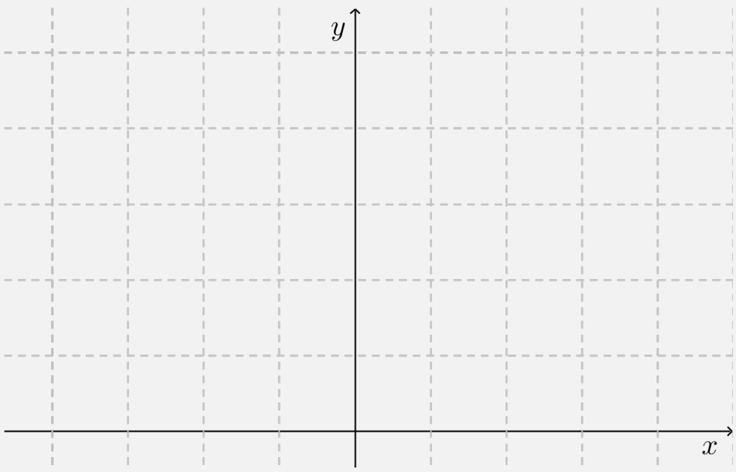
9.1 Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen

Funktionen der Form $f(x) = b^x$ mit einer positiven reellen Zahl $b \neq 1$ heißen **Exponentialfunktionen**. Setzt man für b die sogenannte **Eulersche Zahl** $e = 2{,}718\ldots$ ein, so erhält man die sogenannte **e-Funktion** $f(x) = e^x$.
Ist die Basis b größer als 1, so spricht man von **exponentiellem Wachstum**.
Ist die Basis b zwischen 0 und 1, so spricht man von **exponentieller Abnahme**.

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Exponentialfunktionen.

   a) $f_1(x) = 2^x$ b) $f_2(x) = 3^x$

x	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$



   c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_3(x) = e^x$ in das obige Koordinatensystem.

2. Ein ansteckendes Virus breitet sich in einer Stadt aus. Zu Beginn ist nur eine Person infiziert, die Anzahl der infizierten Personen verdreifacht sich aber jeden Tag.

   a) Geben Sie eine Funktion an, mit der Sie die Anzahl der Infizierten an jedem Tag berechnen können.

   b) Nach wie vielen Tagen sind 243 Personen infiziert? Stellen Sie eine Gleichung zu diesem Problem auf.

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable nur in Exponenten vorkommt, heißen **Exponentialgleichungen**.

9.2 Der Logarithmus

Um die Exponentialgleichung der vorherigen Aufgabe zu lösen, muss der Exponent bestimmt werden, der benötigt wird, um 243 als Potenz mit der Basis 3 darzustellen. Dieser Exponent (in diesem Fall 5) wird **Logarithmus** von 243 zur Basis 3 genannt. Man schreibt $5 = \log_3(243)$. Allgemein gilt:

Die Zahl n, die die Gleichung $b^n = a$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$ löst, wird als **Logarithmus von a zur Basis b** bezeichnet. Man schreibt $n = \log_b(a)$.
Es gilt die Äquivalenz: $b^n = a \iff n = \log_b(a)$

Beispiel: Es ist $\log_2(8) = 3$, weil $2^3 = 8$.

3. Berechnen und begründen Sie.
   a) $\log_3(9) =$
   b) $\log_2(64) =$
   c) $\log_4(64) =$
   d) $\log_{64}(4) =$
   e) $\log_3(\frac{1}{9}) =$
   f) $\log_5(1) =$
   g) $\log_7(7^{51}) =$
4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf und vereinfachen Sie.
   a) $2^x = 64$
   b) $\log_5(x) = 4$
   c) $\log_{\frac{1}{4}}(x) = -5$
   d) $\log_x(\frac{1}{8}) = -3$
5. Bestimmen Sie $\log_b(b^n)$ für $b > 0$ und $b \neq 1$.
6. Lösen Sie die Gleichung $b^x = a$ für $b > 0$ und $b \neq 1$ nach x auf und setzen Sie Ihr Ergebnis wieder in die Gleichung ein. Was stellen Sie fest?

7. Bestimmen Sie $\log_b(1)$ und $\log_b(b)$ für $b > 0$ und $b \neq 1$.

8. Welche Terme müssen in den markierten Feldern stehen, damit die Umformungen stimmen?.

$$\begin{tikzcd} \boxed{} \arrow[r, bend left, "\text{Logarithmus zur Basis } b \text{ anwenden}"] & x \arrow[l, bend left, "b \text{ hoch}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\text{Logarithmus zur Basis } b \text{ anwenden}"] & \boxed{} \arrow[l, bend left, "b \text{ hoch}"] \end{tikzcd}$$

Mit diesen Überlegungen können auch kompliziertere Exponentialgleichungen gelöst werden. Dabei kann man oft wie folgt vorgehen:

(1) Formen Sie die Gleichung mit geeigneten Äquivalenzumformungen so um, dass die Potenz mit der Variablen auf der einen Seite und alle anderen Terme auf der anderen Seite der Gleichung stehen.

(2) Wenden Sie den Logarithmus an (oder machen Sie bei gleicher Basis einen Exponentenvergleich) und lösen Sie die entstandene Gleichung.

(3) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

Zur Überprüfung empfiehlt es sich, die Probe zu machen.

<u>Beispiel:</u> Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2^{2x-1} - 4 = 0$.

$$\begin{array}{llrl}
 & & 2^{2x-1} - 4 = 0 & \mid +4 \\
(1) & \Longleftrightarrow & 2^{2x-1} = 4 & \mid \log_2(\dots) \\
(2) & \Longleftrightarrow & \log_2(2^{2x-1}) = \log_2(4) & \\
 & \Longleftrightarrow & 2x - 1 = 2 & \mid +1 \\
 & \Longleftrightarrow & 2x = 3 & \mid : 2 \\
 & \Longleftrightarrow & x = \dfrac{3}{2} & \\
(3) & \text{Also ist } \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}. & &
\end{array}$$

Probe: $2^{2\cdot\frac{3}{2}-1} - 4 = 2^2 - 4 = 0 \quad \checkmark$

In diesem Fall könnte man auch durch Exponentenvergleich zur Lösung gelangen. Da $4 = 2^2$ ist, gilt

$$2^{2x-1} = 2^2.$$

Durch Vergleich der Exponenten ergibt sich

$$2x - 1 = 2,$$

also ist $x = \frac{3}{2}$.

9.3 Die Logarithmusrechenregeln

So wie die Potenzrechenregeln das Rechnen mit Potenzen und die Wurzelrechenregeln das Rechnen mit Wurzeln regeln, gibt es auch Logarithmusrechenregeln, die das Rechnen mit Logarithmen regeln. Diese sind eng mit den Potenzrechenregeln verwandt.
Zur Veranschaulichung folgende Überlegungen:
Es ist

$$\log_{10}(1000) = 3, \text{ da } \log_{10}(10^3) = 3$$

und

$$\log_{10}(100) = 2, \text{ da } \log_{10}(10^2) = 2.$$

Also ist

$$\log_{10}(1000) + \log_{10}(100) = 3 + 2 = 5.$$

Außerdem ist

$$\log_{10}(1000 \cdot 100) = \log_{10}(10^5) = 5.$$

Durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\log_{10}(1000) + \log_{10}(100) = \log_{10}(1000 \cdot 100).$$

Allgemein gilt für $b, u, v > 0$ und $b \neq 1$:

$$\log_b(u) + \log_b(v) = \log_b(u \cdot v)$$

9. Stellen Sie ähnliche Überlegungen für das Beispiel $\log_{10}\left(\frac{10^5}{10^3}\right)$ an.

10. Vereinfachen Sie $\log(u^3)$ für $u > 0$, indem Sie u^3 als Produkt schreiben und mehrfach die Regel aus dem Beispiel oben anwenden. Wie könnte hier eine entsprechende Logarithmus-Regel lauten?

Allgemein gelten:

Die Logarithmusrechenregeln

Es gilt für $u, v, b > 0$, $b \neq 1$ und $r \in \mathbb{R}$:

1. **Erste Logarithmusrechenregel:** Zwei Logarithmen zur gleichen Basis werden addiert, indem die Basis beibehalten wird und die Argumente multipliziert werden.
$$\log_b(u) + \log_b(v) = \log_b(u \cdot v)$$
2. **Zweite Logarithmusrechenregel:** Zwei Logarithmen zur gleichen Basis werden subtrahiert, indem die Basis beibehalten wird und die Argumente dividiert werden.
$$\log_b(u) - \log_b(v) = \log_b\left(\frac{u}{v}\right)$$
3. **Dritte Logarithmusrechenregel:** Logarithmen werden mit einer Zahl r multipliziert, indem das Argument mit r potenziert wird.
$$r \cdot \log_b(u) = \log_b(u^r)$$

Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang zwischen den Logarithmusrechenregeln und den Potenzrechenregeln. Beispielsweise wird aus dem Logarithmus eines Produktes eine Summe von Logarithmen, umgekehrt kann man eine Potenz mit einer Summe im Exponenten als Produkt von zwei Potenzen schreiben.

Für Logarithmen zu speziellen Basen gibt es feste Abkürzungen:

$\log_2(c)$	$= \mathrm{ld}(c) = \mathrm{lb}(c)$	**dualer** oder **binärer** Logarithmus
$\log_{10}(c)$	$= \lg(c)$	**dekadischer** Logarithmus, Zehnerlogarithmus
$\log_e(c)$	$= \ln(c)$	**natürlicher** Logarithmus mit der **Eulerschen Zahl** $e = 2{,}718\ldots$

11. Fassen Sie, wenn möglich, zusammen ($a, b, c, u, v, w > 0$ und $b \neq 1$).

a) $\log_b(2) + \log_b(3) =$

b) $\lg(u - v) - \lg(u) =$

c) $\log_b(7) + 2\log_b(13^2) - \log_b(91) =$

d) $6\log_b(u) - (\log_b(v) + \log_b(w)) =$

e) $\dfrac{\ln(6)}{\ln(3)} =$

f) $a + \lg\left(\dfrac{c}{10^a}\right) =$

12. Mark möchte $\log_3(7)$ mit seinem Taschenrechner berechnen.

Mark : Wie gebe ich denn $\log_3(7)$ in meinen Taschenrechner ein? Ich habe nur die Tasten für den Zehnerlogarithmus und den natürlichen Logarithmus.

Holger : Also ich nehme einfach den Zehnerlogarithmus und gebe das so ein: $\log_3(7) = \dfrac{\lg(7)}{\lg(3)}$.

Mark : Darf man das? Kommt da das Richtige raus?

Holger : Na klar, schau dir doch mal die folgende Äquivalenzumformung an:

$$\begin{aligned}
& & x &= \log_3(7) & & \\
&\Longleftrightarrow & 3^x &= 7 & & \mid \lg(\ldots) \\
&\Longleftrightarrow & \lg(3^x) &= \lg(7) & & \mid \text{3. Logarithmusrechenregel} \\
&\Longleftrightarrow & x \cdot \lg(3) &= \lg(7) & & \mid : \lg(3) \\
&\Longleftrightarrow & x &= \frac{\lg(7)}{\lg(3)} & &
\end{aligned}$$

Holger : Somit ist $x = \log_3(7) = \dfrac{\lg(7)}{\lg(3)}$.

Mark : Ach so! Kann ich da auch den natürlichen Logarithmus nehmen?

Was meinen Sie?

Allgemein gilt:

Der Basiswechselsatz

Es gilt für $a, b, c > 0$ und $a, b \neq 1$:

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$

13. 🖩 Berechnen Sie folgende Logarithmen mit Hilfe des Basiswechselsatzes.

a) $\log_2(17) =$

b) $\log_{\frac{2}{3}}(13) =$

c) $\log_4\left(\frac{5}{7}\right) =$

9.4 Logarithmusfunktionen und Logarithmusgleichungen

Funktionen der Form $f(x) = \log_b(x)$ mit einer positiven reellen Zahl $b \neq 1$ heißen **Logarithmusfunktionen**. Setzt man $b = e = 2{,}718\ldots$, so erhält man die sogenannte **natürliche Logarithmusfunktion** $f(x) = \ln(x)$.

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Logarithmusfunktionen und bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge.

   a) $f_5(x) = \log_2(x)$

   b) $f_6(x) = \log_3(x)$

x	$y = f_5(x)$	$y = f_6(x)$

   c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_7(x) = \log_e(x)$ in das obige Koordinatensystem.

2. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge von $f_5(x), f_6(x)$ und $f_7(x)$.

Hinweis: Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion sind **Umkehrfunktionen** zueinander.

Dass Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion Umkehrfunktionen zueinander sind, kann unter anderem beim Lösen von Gleichungen genutzt werden:

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable nur im Argument von Logarithmen vorkommt, heißen **Logarithmusgleichungen**.

Um Logarithmusgleichungen zu lösen, muss man in einem Rechenschritt auf beiden Seiten die Basis des auftretenden Logarithmus hinzufügen und die Terme auf beiden Seiten in den Exponenten schreiben. Durch Anwendung geeigneter Potenz- oder Logarithmusregeln fallen die Logarithmusterme weg und die so entstandene Gleichung kann auf gewohnte Weise gelöst werden.

<u>Beispiel:</u> Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung

$$\log_2(2x+8)+\log_2(4x)=2\log_2(x+1)+3.$$

Es ist $\mathbb{D}=(0,\infty)$.

$$\begin{array}{rrcll}
 & \log_2(2x+8)+\log_2(4x) &=& 2\log_2(x+1)+3, & \mid 2^{(\dots)} \\
\iff & 2^{(\log_2(2x+8)+\log_2(4x))} &=& 2^{(2\log_2(x+1)+3)} & \mid \text{Potenzregeln anwenden} \\
\iff & 2^{\log_2(2x+8)}\cdot 2^{\log_2(4x)} &=& \left(2^{\log_2(x+1)}\right)^2\cdot 2^3 & \mid 2^{\log_2(x)}=x \\
\iff & (2x+8)\cdot(4x) &=& (x+1)^2\cdot 8 & \mid \text{ausmultiplizieren} \\
\iff & 8x^2+32x &=& 8x^2+16x+8 & \mid -8x^2-16x \\
\iff & 16x &=& 8 & \mid :16 \\
\iff & x &=& \frac{1}{2} &
\end{array}$$

Also ist $\mathbb{L}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Alternativ kann man auch die Logarithmusrechenregeln anwenden und dann erst die Basis hinzufügen:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \log_2(2x+8)+\log_2(4x) &=& 2\log_2(x+1)+3 & \mid -2\log_2(x+1) \\
\iff & \log_2(2x+8)+\log_2(4x)-2\log_2(x+1) &=& 3 & \mid \text{Logarithmusregeln anwenden} \\
\iff & \log_2\left(\frac{(2x+8)(4x)}{(x+1)^2}\right) &=& 3 & \mid 2^{(\dots)} \\
\iff & \frac{(2x+8)(4x)}{(x+1)^2} &=& 2^3 & \mid \cdot(x+1)^2
\end{array}$$

Der Rest der Rechnung erfolgt analog zum ersten Lösungsweg.

3. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(x^2+4)=2\ln(x+1).$$

9.5 Gemischte Übungsaufgaben zu Exponentialfunktionen und Logarithmen

1. Lösen Sie nach x auf und berechnen Sie x.

   a) $25^x + 19 = 24$

   b) $\log_{0,5}(x) = 3$

   c) $\log_x(16) = 4$

   d) $\log_x(625) = 4$

2. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Logarithmusrechenregeln ($x, y, z > 0$, sowie $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a \neq 1$).

   a) $\log_a(12) - \log_a(3)$

   b) $4\log_2(5) - 3\log_2(2) + \log_2(7)$

   c) $a\ln(x) - \frac{1}{b} \cdot \ln(y) + c \cdot \ln(z)$

3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\log_{27}(81)$.

4. Vereinfachen Sie.

   a) $\lg(100)$

   b) $\lg\left(10^{-n}\right)$

   c) $\ln(\sqrt{e})$

   d) $\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$

   e) $20\lg(10)$

   f) $e^{-\frac{1}{2}\ln(9)}$

   g) $e^{-2\ln(\sqrt{5})}$

   h) $\ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$

   i) $\ln\left(\sqrt{e^k}\right)$

   j) $\ln\left(3e^{-1}\right)$

   k) $\ln\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{e}\right)$

   l) $e^{-0,5\ln(0,25)}$

   m) $e^{a\ln(b)}$

   n) $e^{-t\ln(c)}$

   o) $e^{\ln(x)}$

   p) $\log_b(1)$

   q) $10^{\lg(b)}$

   r) $\ln\left(e^x\right)$

   s) $\log_b(b)$

   t) $a^{\log_a(b)}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie dazu jeweils zunächst die Definitionsmenge.
   a) $3 \cdot 5^x - 375 = 0$
   b) $e^{3x} - 2 = 0$
   c) $e^x(1 - e^x) = 0$
   d) $7^{x-5} = 7^{5-x}$
   e) $2^{4x+8} = 4^{5x-2}$
   f) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$
   g) $\ln(e^{3x}) = \log_4(\frac{1}{2}) + \log_5(25^x) - 0{,}5$
   h) $\lg(x) - 2 = 0$
   i) $\log_7(x) - \log_7(\sqrt{x}) = 2 \cdot \log_7(2)$
   j) $2 \cdot \ln(x) = \ln(2x)$
   k) $\log_3(4x + 1) = \log_3(x) + 1$
   l) $x^{\lg(x)} = 1$
   m) $x^{\lg(x)} = x$
   n) $x^x = x$

6. Das Müllaufkommen einer Stadt wächst jährlich um $4\,\%$. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

7. Ein See ist mit Algen verschmutzt. Die Oberfläche, die mit Algen bedeckt ist, verdoppelt sich jede Woche. Zur Zeit $t = 0$ nehmen die Algen $0{,}4\,\text{m}^2$ der Gesamtoberfläche des Sees ein.
   a) Drücken Sie die bedeckte Teichfläche A in Abhängigkeit von der Zeit t aus und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.
   b) Nach welcher Zeit sind $20\,\text{m}^2$ der Teichfläche bedeckt?
   c) Was bedeutet $t = -1$?

8. Die Temperatur eines $285\,°\text{C}$ heißen Körpers halbiert sich stündlich.
   a) Stellen Sie die Temperatur T in Abhängigkeit der Zeit t dar und zeichnen Sie den Graphen.
   b) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorgangs?
   c) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers $1\,°\text{C}$?

9. Zum Zeitpunkt $n = 0$ beträgt das Guthaben auf einem Sparkonto $1.212{,}75\,€$. Der Zinssatz ist $5\,\%$.
   a) Wie groß war das Guthaben vor zwei Jahren, wenn keine Einzahlungen oder Abhebungen vorgenommen wurden?
   b) Wie groß wird das Guthaben in drei Jahren sein?

10. Die Intensität I des Tageslichtes nimmt im Meer alle $5\,\text{m}$ um $50\,\%$ ab. Ist es dann noch möglich, mit einer Unterwasserkamera, die $65\,\%$ des Tageslichts I braucht, in einer Tiefe von $3\,\text{m}$ gute Aufnahmen zu machen? Begründen Sie Ihre Antwort.

10 Proportionalität und Prozentrechnung

10.1 Proportionalität und umgekehrte Proportionalität

1. Ein Radfahrer braucht eine halbe Stunde für 12 Kilometer.
   a) Wie weit kommt er in einer dreiviertel Stunde, wie weit in eineinhalb Stunden?
   b) Wie lange braucht er für 27 Kilometer?
   c) Welche Größen spielen hier eine Rolle und was gilt für ihr Verhältnis?
2. Eineinhalb Liter Bier passen in vier Gläser.
   a) Wie viel Bier wird benötigt, um sechs Gläser zu füllen?
   b) Wie viele Gläser kann man mit vier Litern füllen?
   c) Welche Größen spielen hier eine Rolle und was gilt für ihr Verhältnis?

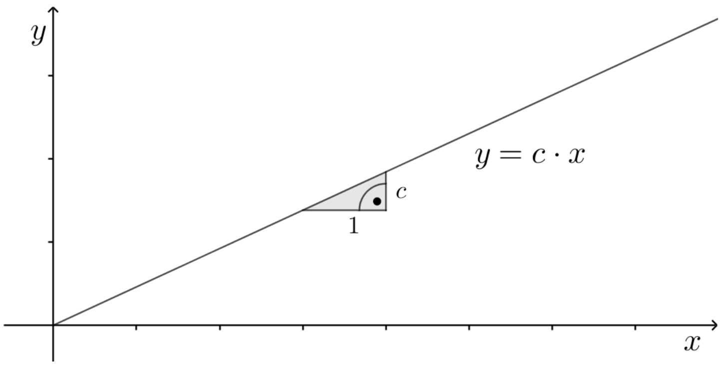
Für die Größen in diesen Beispielen gilt:
Wenn eine Größe verdoppelt (verdreifacht, halbiert, ...) wird, verdoppelt (verdreifacht, halbiert, ...) sich auch die andere. Das bedeutet, dass das Verhältnis zwischen beiden Größen konstant ist.

Wenn das Verhältnis zwischen zwei veränderlichen Größen x und y konstant ist, nennt man sie **quotientengleich** oder **proportional**.
Es gilt die **Verhältnisgleichung** $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, wobei x_1, x_2, y_1 und y_2 Werte der Größen x und y sind.

Ist ein Term konstant, kann man dies immer als Gleichung schreiben, indem man auf die eine Seite der Gleichung den konstanten Term setzt und auf die andere Seite eine Konstante, beispielsweise c. Für zwei proportionale Größen x und y gilt also $\frac{y}{x} = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Löst man diese Gleichung nach y auf, ergibt sich $y = c \cdot x$. Das heißt, dass man y als Funktion von x auffassen kann:

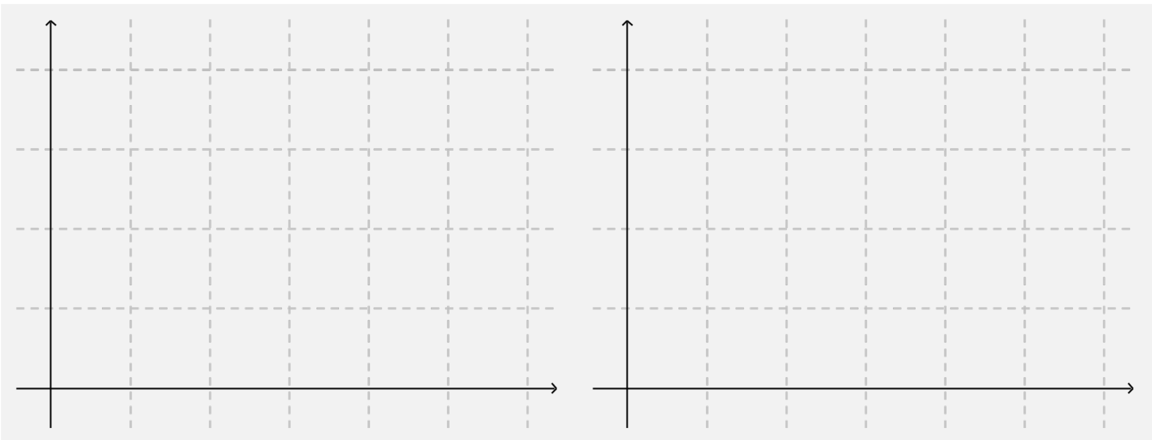
$$y = f(x) = c \cdot x$$

Man erhält als Graphen eine Ursprungsgerade mit der Steigung c:



Bei proportionalen Größen gilt dabei für die Definitionsmenge meist $\mathbb{D} = [0, \infty)$.

3. Zeichnen Sie die zu Aufgabe 1 und 2 gehörigen Graphen in die folgenden Koordinatensysteme. Beschriften Sie die Achsen.



4. Nennen Sie Beispiele für proportionale Größen und formulieren Sie selbst eine Aufgabe.

5. Ein PKW benötigt auf Überlandfahrten $7{,}5$ Liter Benzin auf 100 Kilometer. Dann reicht eine Tankfüllung für 600 Kilometer. Im Stadtverkehr verbraucht er 9 Liter Benzin auf 100 Kilometer.

   a) Wie weit reicht eine Tankfüllung im Stadtverkehr?

   b) Wie viel dürfte das Auto verbrauchen, damit die Tankfüllung für 900 Kilometer reicht?

   c) Welche Größen spielen hier eine Rolle und in welcher Beziehung stehen sie zueinander?

6. Klaus hat für seine Party Getränke für 20 Personen eingekauft und geht davon aus, dass sie für fünf Stunden reichen. Die Feier beginnt um 21:00 Uhr und es kommen 10 Gäste mehr als geplant.

   a) Wann sollte Klaus neue Getränke organisieren?

b) Wie viele Gäste kann Klaus einladen, wenn die Getränke für vier Stunden reichen sollen?

c) Welche Größen spielen hier eine Rolle und in welcher Beziehung stehen sie zueinander?

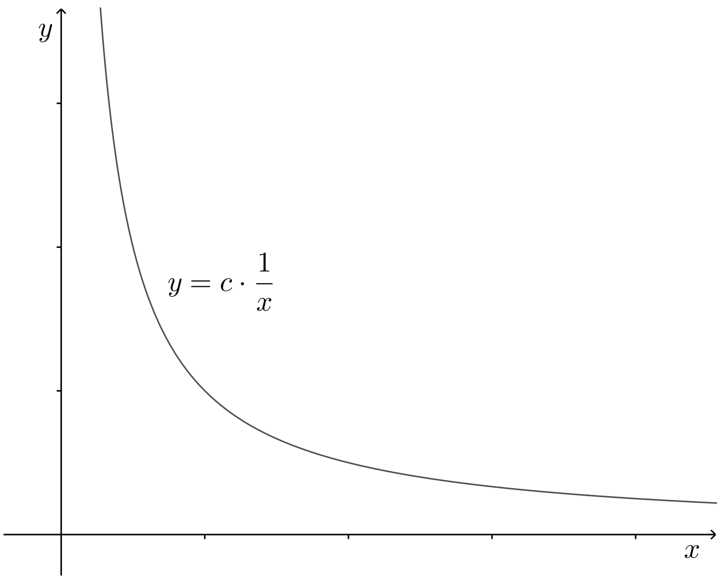
Für die Größen in diesen Beispielen gilt:
Wenn eine Größe verdoppelt (verdreifacht, halbiert, ...) wird, wird die andere halbiert (gedrittelt, verdoppelt, ...).

Wenn das Produkt aus zwei veränderlichen Größen x und y konstant ist, nennt man sie **produktgleich** oder **umgekehrt proportional**.
Es gilt die **Produktgleichung** $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$, wobei x_1, x_2, y_1 und y_2 Werte der Größen x und y sind.

Es gilt also $y \cdot x = c$ bzw. $y = c \cdot \frac{1}{x}$, mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Auch hier kann man y als Funktion von x auffassen:

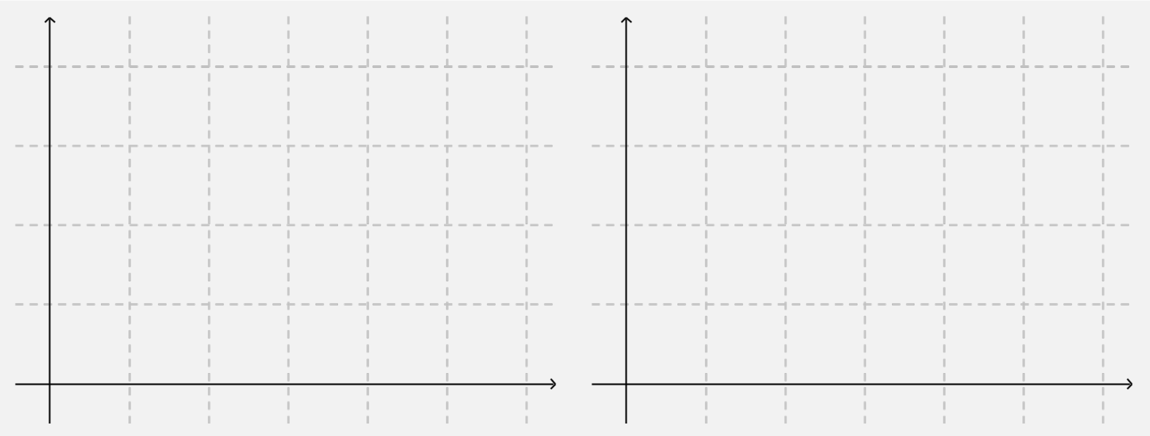
$$y = f(x) = c \cdot \frac{1}{x}$$

Der Graph dieser Funktion ist eine Hyperbel:



Bei umgekehrt proportionalen Größen gilt dabei für die Definitionsmenge meist $\mathbb{D} = (0, \infty)$. Deshalb wurde in der vorherigen Abbildung nur der positive Teil der Hyperbel dargestellt.

7. Zeichnen Sie die zu Aufgabe 5 und 6 gehörigen Graphen in die folgenden Koordinatensysteme. Beschriften Sie die Achsen.



8. Nennen Sie Beispiele für umgekehrt proportionale Größen und formulieren Sie selbst eine Aufgabe.

9. Nennen Sie Beispiele für zwei Größen, die weder proportional noch umgekehrt proportional zueinander sind.

10.2 Gemischte Übungsaufgaben zur Proportionalität

1. Welche der Funktionen aus Aufgabe 1 im Kapitel 4.4 beschreiben einen proportionalen Zusammenhang? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Eine $1{,}75$ m große Person steht 1 m neben einer Laterne. Die Person wirft einen $0{,}5$ m langen Schatten.
   a) Wie hoch ist die Laterne?
   b) Wie lang ist der Schatten, wenn der Abstand 2 m (3 m,...) beträgt?

3. Der 5-Meter-Turm im Schwimmbad wirft in der Mittagssonne einen 2 m langen Schatten.
   a) Wie lang sind der Schatten vom i) 10- bzw. ii) 3-Meter-Turm?
   b) Der Bademeister wirft einen 70 cm langen Schatten. Wie groß ist er?
   c) Der Schatten eines Beobachtungsturmes ist 90 cm lang. Wie hoch ist der Turm?
   d) Formulieren Sie zu dieser Situation Fragen, die Sie mit $\frac{2}{5}$ oder $\frac{5}{2}$ beantworten können.
   e) Lösen Sie die Aufgaben a) - c) auch graphisch.

4. Herr A und Frau B investieren Geld in ein Geschäft und wollen den Profit im Verhältnis $2{:}3$ teilen. Wie viel Geld erhält jeder, wenn der Profit 1000 € beträgt?

5. Welche der folgenden Fragen können Sie beantworten? Begründen Sie und rechnen Sie, falls das sinnvoll ist. Geben Sie gegebenenfalls notwendige Randbedingungen an.
   a) Ein $1{,}25$ m tiefer Swimmingpool wird mit Wasser gefüllt. Nach fünf Minuten beträgt die Wasserhöhe im Pool 30 cm. Wann läuft das Wasser über?
   b) Nach der Fertigstellung der Staumauer steigt das Wasser in einer Talsperre im ersten Jahr von 0 auf 5 Meter. Wann ist der Stausee 12 Meter tief?
   c) Die Temperatur beträgt um sieben Uhr morgens $2\,^\circ$C und um ein Uhr mittags $20\,^\circ$C. Wie warm ist es um elf Uhr?
   d) Ein 450 g Glas Nutella kostet im Sonderangebot $1{,}69$ €. Wie viel bezahlt man für ein 800 g Glas?
   e) Der Weltrekordler über $10\,000$ m läuft die Strecke in 26 Minuten und 18 Sekunden. Wie lange braucht er für einen Marathon ($42{,}195$ km)?
   f) Ein Radfahrer fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 20 km/h. Wie lange braucht er von Braunschweig nach Hannover?
   g) Auf einer Party haben die Gäste nach vier Stunden ein Bierfass zu $75\,\%$ leer getrunken. Wann ist das Bier alle?
   h) Ein Student braucht für seine Hausaufgaben $3{,}5$ Stunden. Wie lange brauchen drei Studierende für die Hausaufgaben?

10.3 Prozentrechnung

1. Im Wintersemester gab es 2563 Erstsemester an der Ostfalia. Davon haben 380 einen Vorbereitungskurs besucht. Nutzen Sie die Bruchrechnung, um diesen Sachverhalt darzustellen.

2. Berechnen Sie.

   a) $\frac{3}{5}$ von $200\,\mathrm{g}$

   b) $\frac{4}{7}$ von $3{,}5\,\mathrm{l}$

   c) $\frac{3}{4}$ von 20

   d) Beschreiben Sie in Worten, wie Sie jeweils zur Lösung gelangt sind.

   e) Wie lautet jeweils die Verhältnisgleichung?

In den Beispielen bedeutet „$\frac{p}{g}$ von a“, dass $\frac{p}{g}$ mit a multipliziert wird. Die Formulierung ist üblich für $p \leq g$. Der Bruch $\frac{p}{g}$ hat keine Einheit und ist eine relative Größe, die einen Anteil von einer betrachteten Gesamtheit beschreibt. Mit $g = 100$ erhält man einen Dezimalbruch und gelangt so zur Prozentrechnung. Der Begriff **Prozent** bedeutet „von Hundert“ oder „Hundertstel“: $p\,\% = \frac{p}{100}$.
So kann zum Beispiel in Aufgabe 2) die Verhältnisgleichung wie folgt erweitert werden:

$$\frac{3}{5} = \frac{120}{200} = \frac{60}{100} = 60\,\% = 0,6$$

Das heißt $120 = 60\,\% \cdot 200$, wobei 120 als **Prozentwert** W, 60 als **Prozentfuß** p bzw. $0,6$ als **Prozentsatz** i und 200 als **Grundwert** G bezeichnet werden. Allgemein erhält man:

Die Prozentformel

$$W = p\,\% \cdot G = \frac{p}{100} \cdot G = i \cdot G$$

Berechnung des Prozentwertes W

3. Berechnen Sie.

   a) $75\,\%$ von $250\,\text{g}$ Schokolade

   b) $60\,\%$ von 1500 Studierenden

   c) $180\,\%$ von $120\,€$

   d) $5\,\%$ Zinsen auf $700\,€$

   e) $p\,\%$ von G

Berechnung des Prozentsatzes i

4. Geben Sie in Prozent an.

   a) 2 von 5 Stückchen Kuchen

   b) 70 von 700 Personen

   c) $50\,\text{g}$ von $250\,\text{g}$ Schokolade

5. Formulieren Sie selbst eine Aufgabe zur Berechnung des Prozentsatzes.

6. Wie kann man i, bei gegebenem W und G, berechnen?

Berechnung des Grundwertes G

7. Bestimmen Sie den Grundwert.

   a) Vier Studierende kommen zu spät. Das sind $8\,\%$ aller Teilnehmer.

   b) In einer Gasflasche sind noch $750\,\text{g}$ Gas. Sie ist zu $30\,\%$ gefüllt.

   c) Nach einer Party sind vier Kisten Bier leer. Das sind $80\,\%$ des Vorrats.

8. Formulieren Sie selbst eine Aufgabe zur Berechnung des Grundwertes.

9. Wie kann man G, bei gegebenem i und W, berechnen?

10.4 Zinsrechnung

1. Ein Guthaben von $700\,€$ wird mit einem Zinssatz von $2\,\%$ pro Jahr angelegt. Wie hoch sind die Zinsen, die in einem Jahr anfallen?

In der Zinsrechung entspricht der Grundwert G aus der Prozentrechnung dem Anfangskapital K_0 und der Prozentwert W den Zinsen Z. Analog zur Prozentformel gilt damit für die Zinsen:

$$Z = p\% \cdot K_0.$$

In der Zinsrechnung nennt man p auch den **Zinsfuß** und i den **Zinssatz**. Er berechnet sich als:

$$i = \frac{p}{100}$$

Die Größe

$$q = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$$

heißt **Zinsfaktor**. Er gibt an, um welchen Faktor das Kapital in einer Zinsperiode wächst.

2. 🖩 Ein Guthaben von $700\,€$ wird mit einem Zinssatz von $2\,\%$ pro Jahr angelegt. Wie hoch ist das Guthaben nach

   a) einem Jahr b) zwei Jahren c) 10 Jahren d) n Jahren?

Für ein Anfangskapital K_0 und ein Endkapital K_1 gilt nach einer Zinsperiode:

$$K_1 = K_0 \cdot q.$$

Nach n Zinsperioden gilt für das Endkapital K_n die Formel der **exponentiellen Verzinsung** oder die

Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

3. 🖩 Ein Anfangskapital von 300 € vermehrt sich in zwei Jahren auf $318,27$ €.
   a) Wie hoch ist der Zinssatz?

   b) Stellen Sie eine allgemeine Formel zur Bestimmung des Zinssatzes auf.

   c) 🖩 Nach wieviel Jahren ist das Startkapital auf 380 € angewachsen?

   d) Stellen Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der Laufzeit auf.

4. 🖩 Eine in 5 Jahren fällige Schuld von 730 € soll heute zurückgezahlt werden. Wie hoch ist die heute fällige Summe, wenn mit einem Zinssatz von $4\,\%$ kalkuliert wird?

Stellt man die Formel zur Zinseszinsrechnung nach dem Startkapital K_0 um, so erhält man die

Barwertformel

$$K_0 = K_n \cdot q^{-n}$$

10.5 Gemischte Übungsaufgaben zur Prozent- und Zinsrechnung

1. Ein Fotokopierer kann Bilder vergrößern und verkleinern. Dazu stellt man einen bestimmten Prozentsatz ein. $100\,\%$ bedeutet, dass die Größe erhalten bleibt. Bei $120\,\%$ wird jede Strecke auf das $1{,}2$-fache vergrößert, bei $75\,\%$ auf das $0{,}75$-fache verkleinert.
   a) Ein Quadrat der Seitenlänge 12 cm wird mit $60\,\%$ kopiert. Berechnen Sie die neue Seitenlänge.
   b) Um wie viel kann man ein Foto der Größe 9 cm x 13 cm vergrößern, damit es in einen Rahmen der Größe 18 cm x 24 cm passt?
   c) 🖩 Um wie viel muss man verkleinern, um vom DIN A4 Format (21 cm x $29{,}7$ cm) zu DIN A5 ($14{,}8$ cm x 21 cm) zu kommen?
   d) Ein Bild passt mit der Einstellung $90\,\%$ genau auf ein DIN A4 Blatt. Wie groß ist das Original?
   e) Die Fläche eines Fotos soll verdreifacht werden. Welche Einstellung muss gewählt werden?
   f) Wie verändert sich die Fläche bei der Einstellung $300\,\%$?
   g) Eine Vorlage wird um $50\,\%$ vergrößert, die Kopie wird nochmal um $50\,\%$ vergrößert. Um wie viel größer ist die zweite Kopie als das Original?

2. Im Schlussverkauf gibt es auf die um $30\,\%$ reduzierte Ware nochmal $40\,\%$ Rabatt. Wie groß ist der Preisnachlass insgesamt?

3. Ein Hotel erhöht zur Messe die Zimmerpreise um $120\,\%$. Um wie viel Prozent müssen sie hinterher wieder gesenkt werden, damit sie genauso hoch sind wie vor der Messe?

4. 🖩 Nach wievielen Jahren hat sich ein Anfangskapital von

   a) 10.000 € b) 20.000 € c) 100.000 €

   bei einem Zinssatz von $8\,\%$ verdoppelt?

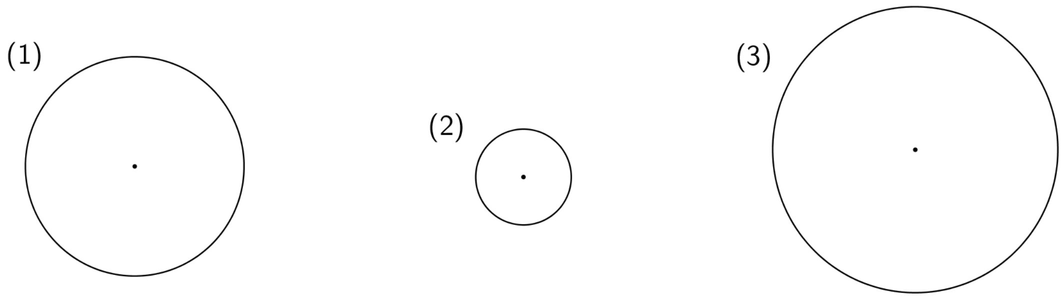
5. 🖩 Ein Sparbrief mit 20 Jahren Laufzeit bringt folgende Zinsen: Die ersten 12 Jahre $2\,\%$, danach 8 Jahre lang $11\,\%$. Wie hoch ist der Durchschnittszinssatz?

11 Trigonometrie

Die **Trigonometrie** beschäftigt sich damit, wie man aus den gegebenen Größen eines Dreiecks wie Seitenlänge und Winkel die fehlenden Größen berechnen kann. Zentraler Bestandteil der Trigonometrie sind die sogenannten **trigonometrischen Funktionen**, zu denen Sinus und Kosinus gehören. Zunächst soll es aber um die wohl berühmteste mathematische Konstante gehen.

11.1 Die Kreiszahl π und das Bogenmaß

1. a) 🖩 Bei den folgenden Kreisen wurden Umfang und Durchmesser gemessen. Ergänzen Sie die unten stehende Tabelle.



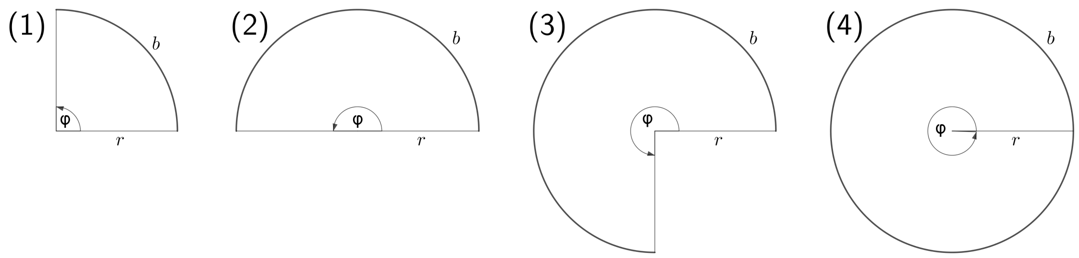
Kreis	Umfang U	Durchmesser d	Radius r	$\frac{U}{d}$	$\frac{U}{r}$
1	$\approx 9{,}2$ cm	$\approx 2{,}9$ cm	$\approx 1{,}45$ cm		
2	≈ 4 cm	$\approx 1{,}3$ cm	$\approx 0{,}65$ cm		
3	$\approx 11{,}8$ cm	$\approx 3{,}8$ cm	$\approx 1{,}9$ cm		

   b) Vergleichen Sie die von Ihnen eingetragenen Werte. Was fällt Ihnen auf?

2. Ergänzen Sie den folgenden Text.
   Bei einem Kreis ist das Verhältnis vom ______ zum Durchmesser ______.
   Dieses Verhältnis hat den Wert $3{,}1415\ldots$ und wird mit ______ bezeichnet. Diese Konstante nennt man auch Kreiszahl. Sie ist eine irrationale Zahl und damit nicht als Bruch darstellbar.
   Auch das Verhältnis vom ______ zum Radius ist ______ und hat den Wert ______.

Nun werden anstelle eines Vollkreises Teile eines Kreises betrachtet. Die Teilumfänge werden als **Bogenlängen** bezeichnet.

3. a) Bei den folgenden Kreisteilen wurde jeweils die Bogenlänge b und der Radius r gemessen. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, indem Sie den Quotienten aus b und r zunächst als gerundete Dezimalzahl und dann als Vielfaches von π in die Tabelle eintragen. Notieren Sie anschließend den Winkel φ (Phi).



Kreisteil	b	r	$\frac{b}{r}$	$\frac{b}{r}$	φ
1	$\approx 2{,}3\,\text{cm}$	$\approx 1{,}5\,\text{cm}$			
2	$\approx 4{,}7\,\text{cm}$	$\approx 1{,}5\,\text{cm}$			
3	$\approx 7{,}1\,\text{cm}$	$\approx 1{,}5\,\text{cm}$			
4	$\approx 10\,\text{cm}$	$\approx 1{,}5\,\text{cm}$			

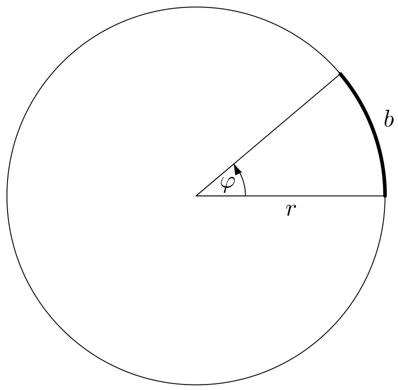
b) Vergleichen Sie die Werte in den letzten beiden Spalten der Tabelle. Was fällt Ihnen auf?

c) Was passiert mit einem Winkel, wenn sich bei gleichem Radius die Länge des Bogens

- verdoppelt,
- halbiert,
- verdreifacht?

d) Wie würden sich Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a) ändern, wenn sich bei jeweils gleich bleibendem Winkel φ der Radius r verändern würde.

- Das Verhältnis $\frac{b}{r}$ der Länge des Bogens b zum Radius r heißt das **Bogenmaß** des Winkels φ.
- Das Bogenmaß ist eine reelle, einheitenlose Zahl. Um deutlich zu machen, dass es sich um das Bogenmaß handelt, schreibt man manchmal auch die „Scheineinheit“ Radiant (rad) hinter die Zahl.
- Das Bogenmaß ist eine positive Zahl, wenn die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) erfolgt, sonst ist es eine negative Zahl.



4. Nennen Sie drei Möglichkeiten, wie man den Radius und die Länge des Bogens verändern kann, damit der Winkel doppelt so groß wird.

5. a) 🖩 Rechnen Sie den Winkel $\alpha_g = 150°$ vom Gradmaß ins Bogenmaß α_b um. Geben Sie Ihr Ergebnis auch als Vielfaches von π an.

   b) 🖩 Berechnen Sie die im Bogenmaß gegebenen Winkel $\alpha_b = 4{,}71$ und $\beta_b = \frac{3}{2}\pi$ im Gradmaß.

   c) Formulieren Sie eine Vorschrift, um Winkel im Bogenmaß ins Gradmaß umzurechnen und umgekehrt.

11.2 Der Satz des Pythagoras

In diesem Abschnitt soll es um einen der wichtigsten Sätze der Geometrie gehen, den **Satz des Pythagoras**. Dazu zunächst einige Informationen über Dreiecke, die in diesem und den nächsten Abschnitten benötigt werden.

- In einem Dreieck (und anderen geometrischen Formen) werden die Eckpunkte üblicherweise mit Großbuchstaben ($A, B, C, \dots$) die Seiten mit Kleinbuchstaben ($a, b, c, \dots$) und die Winkel mit griechischen Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) bezeichnet.
- Die Summe der Winkel in einem Dreieck ist stets $180°$.
- Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten wird als **gleichseitiges Dreieck** bezeichnet. In einem gleichseitigen Dreieck sind auch alle drei Winkel gleich groß.
- Einen $90°$-Winkel bezeichnet man als **rechten Winkel**. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel wird als **rechtwinkliges Dreieck** bezeichnet.
- In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten nennt man **Katheten**.

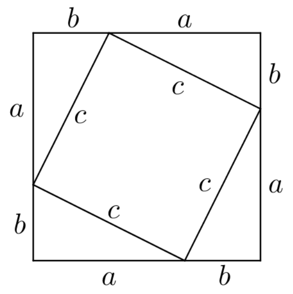
In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

Der Satz des Pythagoras

Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

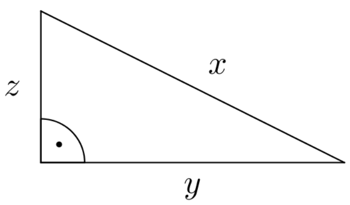
1. Veranschaulichen Sie diesen Satz mit Hilfe einer geeigneten Zeichnung, beschriften Sie diese und formulieren Sie den Satz als Gleichung.

2. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras, indem Sie zunächst den Flächeninhalt des äußeren Quadrats auf zwei unterschiedliche Arten berechnen. Setzen Sie anschließend beide Terme gleich und formen Sie die so erhaltene Gleichung um. (Hinweis: Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks lautet $A = \frac{G \cdot h}{2}$, wobei G für die Grundfläche und h für die Höhe des Dreiecks steht.)

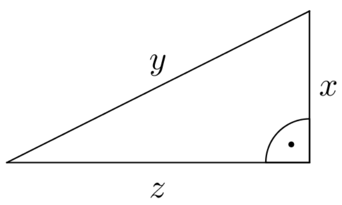


3. Welche Beziehung besteht in den folgenden Dreiecken jeweils zwischen x, y und z?

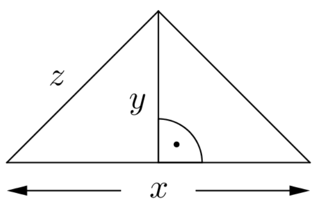
a)



b)



c)

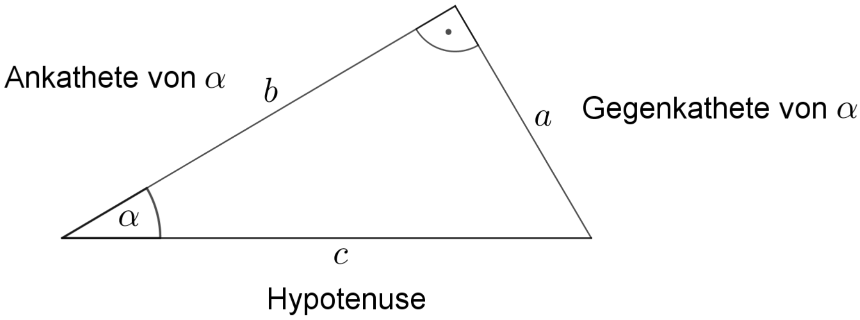


4. Zwischen zwei Pfosten mit einem Abstand von $3{,}80\,\text{m}$ ist waagerecht ein Draht straff gespannt. Hängt man eine Lampe in die Mitte, so senkt sich der Draht um $20\,\text{cm}$. Um wie viel cm hat sich der Draht gedehnt? Fertigen Sie vor der Rechnung eine Skizze an.

11.3 Sinus und Kosinus

Der Satz des Pythagoras beschreibt die Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Im Folgenden sollen auch die Winkel mit berücksichtigt werden. Insbesondere soll untersucht werden, in welcher Beziehung diese zu den Seiten stehen. Dazu dienen die nachfolgenden Überlegungen.

Bezogen auf den betrachteten Winkel unterscheidet man bei rechtwinkligen Dreiecken zwischen **Ankathete** und **Gegenkathete**:



1. a) Zeichnen Sie drei verschiedene rechtwinklige Dreiecke mit einem Winkel $\alpha = 60^\circ$.

   b) 🖩 Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

Seitenverhältnis	Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3
$\dfrac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse von } \alpha}$			
$\dfrac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse von } \alpha}$			
$\dfrac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}$			

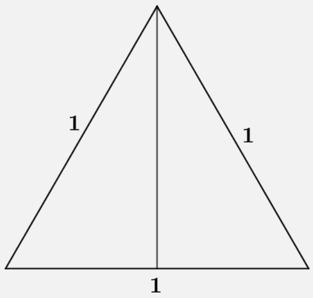
   c) Was fällt Ihnen auf?

In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es für bestimmte Seitenverhältnisse folgende festgelegte Bezeichnungen:

- **Sinus von α:** $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- **Kosinus von α:** $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- **Tangens von α:** $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- **Kotangens von α:** $\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

Mit Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse sind immer die Längen der Seiten bezogen auf den jeweiligen Winkel gemeint. So steht zum Beispiel in diesem Fall „Gegenkathete" für „Länge der Gegenkathete des Winkels α".

2. a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\cos(60°)$, $\sin(60°)$ und $\tan(60°)$ mit Hilfe des vorgegebenen gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1.



   b) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus dem vorherigen Aufgabenteil, um $\cos(30°)$, $\sin(30°)$ und $\tan(30°)$ zu berechnen.

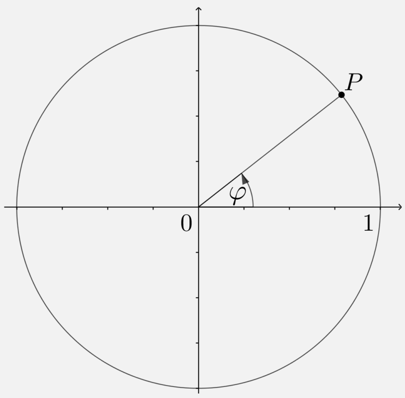
3. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe mit dem Taschenrechner. Was müssen Sie beachten?

4. Zeigen Sie, dass $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$ und $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha)$ gilt.

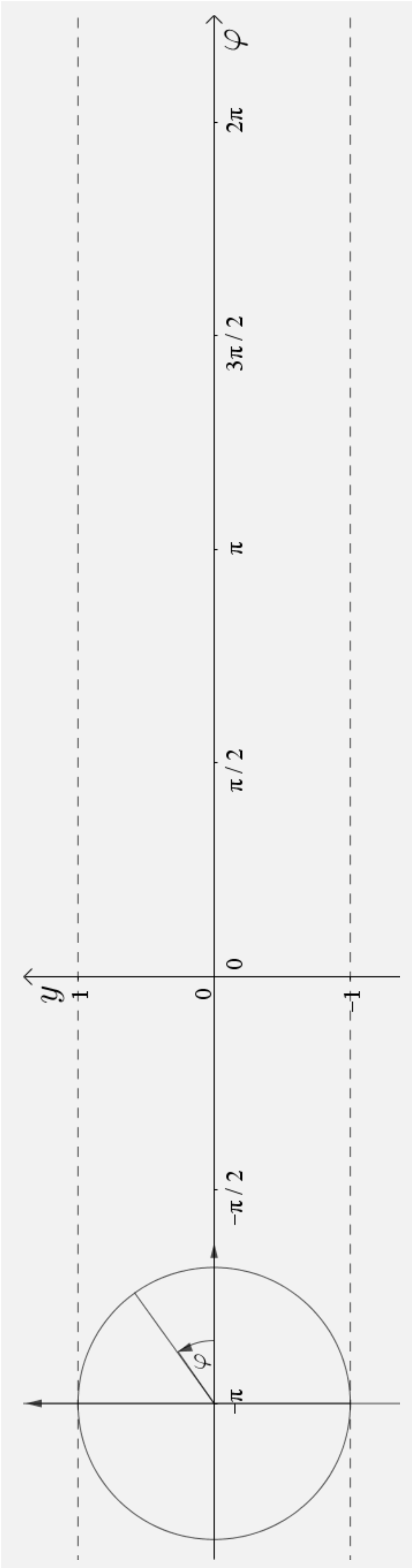
5. Beweisen Sie den **trigonometrischen Pythagoras** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ für rechtwinklige Dreiecke. (Hinweis: $\sin^2(\alpha)$ ist eine andere Schreibweise für $(\sin(\alpha))^2$.)

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ in Abhängigkeit des Winkels φ verändern.

6. Betrachten Sie den folgenden Einheitskreis im ersten Quadranten.
   a) Ergänzen Sie die Zeichnung und markieren Sie, wo man $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ ablesen kann.



   b) Betrachten Sie nun einen Punkt P, der sich entgegen dem Uhrzeigersinn auf dem Kreisrand bewegt, d. h. φ nimmt nicht nur Werte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ an, sondern auch größere. Weil es zu jedem Winkel genau einen Sinus- bzw. Kosinuswert gibt, kann man Sinus und Kosinus als Funktion des Winkels φ auffassen. Man erhält dann die Sinus-Funktion $\sin(\varphi)$ und die Kosinus-Funktion $\cos(\varphi)$.
   Tragen Sie nun im Koordinatensystem auf der nächsten Seite, beginnend mit $\varphi = 0$, zunächst $\sin(\varphi)$ und anschließend $\cos(\varphi)$ zu einigen ausgewählten φ-Werten ein.
   c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$?
   d) Was passiert mit der Sinus- und Kosinusfunktion, wenn $\varphi < 0$ bzw. $\varphi > 2\pi$ ist?

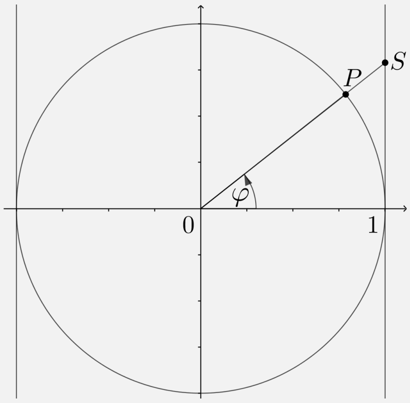


y
1
0
-1
φ
2π
$3\pi / 2$
π
$\pi / 2$
0
$-\pi / 2$
$-\pi$
φ

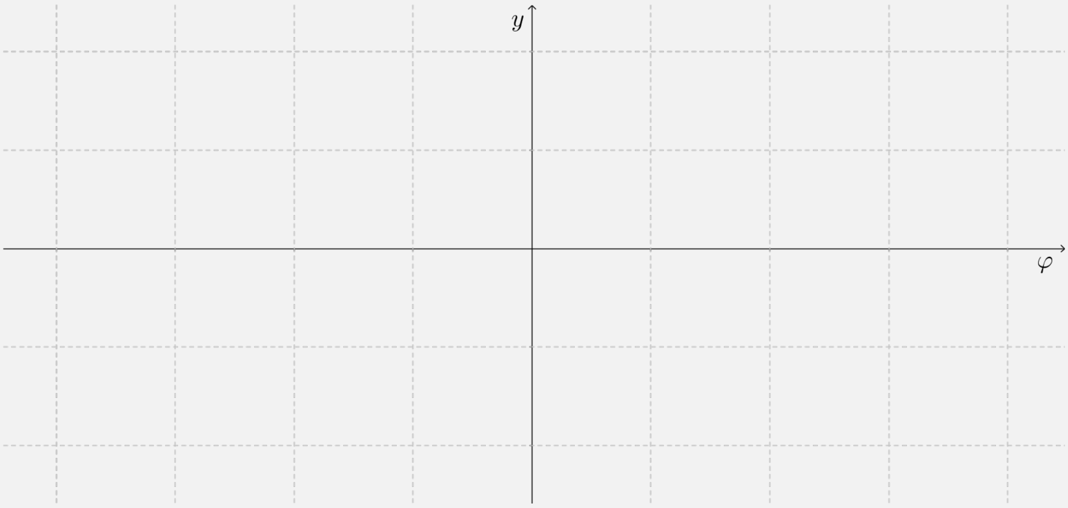
Auch die Tangensfunktion kann man sich am Einheitskreis herleiten.

7. Betrachten Sie erneut den Einheitskreis im ersten Quadranten, diesmal zusätzlich mit den Tangenten in den Punkten $(1;0)$ und $(-1;0)$ an den Kreis.

   a) Welche Strecke veranschaulicht $\tan(\varphi)$? Wo können Sie $\tan(\varphi)$ ablesen, wenn φ zum Beispiel den Wert $135°$ hat?



   b) Skizzieren Sie den Graphen der Tangensfunktion.



   c) Geben Sie die Definitionsmenge der Tangensfunktion an.

Sinus, Kosinus und Tangens werden als **trigonometrische Funktionen** bezeichnet.

Wichtige Eigenschaften von Sinus, Kosinus und Tangens

- Die Funktionen $f(\varphi) = \sin(\varphi)$ und $f(\varphi) = \cos(\varphi)$ sind **periodisch** mit der Periode 2π.
- Die Funktion $f(\varphi) = \tan(\varphi)$ ist **periodisch** mit der Periode π.
- Es gilt $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$.

8. 🖩 Angenommen, Sie wissen, dass der Kosinus eines unbekannten Winkels $\frac{1}{2}$ ist. Wie bestimmen Sie mit dem Taschenrechner den zugehörigen Winkel? Was müssen Sie dabei beachten?

9. a) 🖩 Welchen Winkel schließen die Raumdiagonale und eine anliegende Kante eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE (Längeneinheit) ein?

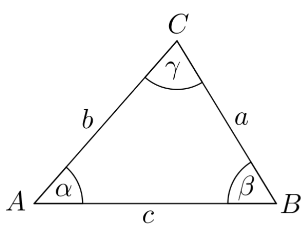
   b) Wie verändert sich dieser Winkel, wenn die Kantenlänge verdoppelt, halbiert, verdreifacht wird?

Bislang wurden in diesem Kapitel immer rechtwinklige Dreiecke zugrunde gelegt. Häufig hat man es aber mit beliebigen Dreiecken zu tun, auf die zum Beispiel der Satz des Pythagoras nicht anwendbar ist. Auch für diese Fälle gibt es Sätze, die an dieser Stelle aufgeführt, aber nicht hergeleitet werden sollen:

Sinussatz und Kosinussatz

Sinussatz: $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \dfrac{a}{b}\,, \quad \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{c}\,, \quad \dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{b}{c}$

Kosinussatz:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



10. Zeigen Sie, dass der Satz des Pythagoras ein Spezialfall des Kosinussatzes ist.

11.4 Gemischte Übungsaufgaben zur Trigonometrie

1. Zwischen den beiden $9\,\mathrm{m}$ voneinander entfernten Laternenmasten links und rechts einer Straße wird ein Drahtseil von $9{,}3\,\mathrm{m}$ Länge jeweils in $4{,}5\,\mathrm{m}$ Höhe befestigt. In der Mitte des Drahtseils wird eine $60\,\mathrm{cm}$ hohe Ampel eingehängt. Wie hoch hängt ihr Boden über der Straße?

2. 🖩 Zwei gerade Waldwege gehen von einem Aussichtspunkt A aus und schließen einen Winkel von $118°$ ein. Nach $2{,}45\,\mathrm{km}$ gelangt man von A aus auf dem einen Weg zu einem Brunnen B, auf dem anderen Weg sind es von A aus $3{,}31\,\mathrm{km}$ bis zu einer Hütte C. Von B nach C soll ein gerader Forstweg angelegt werden.
   a) Wie lang wird dieser Weg?
   b) Welchen Winkel bildet dieser Weg mit dem Weg von A nach B?

3. Die Nordautobahn überquert die Ostautobahn im rechten Winkel. Um 12:00 Uhr befinden sich zwei Autos im Bereich der Brücke direkt übereinander. Eines fährt nach Norden mit konstant $120\,\mathrm{km/h}$, das andere nach Osten mit konstant $150\,\mathrm{km/h}$. Wie weit sind die beiden Autos um 12:40 Uhr in Luftlinie voneinander entfernt?

4. 🖩 Ein startendes Flugzeug hebt an der Stelle P ab und steigt mit einem Winkel von $7°$ an. Die Kirche von Neustadt ist $28\,\mathrm{km}$ von der Stelle P entfernt. In welcher Höhe überfliegt das Flugzeug die Kirche?

5. 🖩 In Berlin-Tegel startet ein Flugzeug mit konstantem Steigungswinkel. Nach $31\,\mathrm{km}$ Flug befindet es sich direkt über dem Schloss Sanssouci in einer Höhe von $3{,}24\,\mathrm{km}$.
   a) Mit welchem Winkel steigt das Flugzeug an?
   b) Nach wie viel Kilometern Flug erreicht das Flugzeug die vorgesehene Flughöhe von $10\,000\,\mathrm{m}$?

12 Zum Selbststudium

12.1 Primfaktorzerlegung

In einer Autowerkstatt gibt es viele Werkzeuge, die helfen, ein Auto auseinanderzunehmen (bzw. wieder zusammenzubauen). Viele Teile – wie zum Beispiel den Motor – kann man selbst noch weiter zerlegen. Irgendwann erhält man dann allerdings ein Teil, welches nicht weiter zerlegbar ist, zum Beispiel eine Schraube.

Dieser Prozess lässt sich auch auf eine Zahl übertragen:
Die Einzelteile einer Zahl werden durch ein Multiplikationszeichen $(\cdot)$ zusammengehalten. Baut man alle Einzelteile durch Multiplikation zusammen, so erhält man wieder die Ausgangszahl. So sind zum Beispiel 2 und 7 „Teile" von 14, da $14 = 2 \cdot 7$. Setzt man 2 und 7 wieder zusammen, so erhält man wieder 14, da $2 \cdot 7 = 14$. Kein Problem!

Nun kann es aber vorkommen, dass man die Einzelteile selbst noch weiter auseinandernehmen kann. So ist es zum Beispiel richtig, dass $40 = 8 \cdot 5$ gilt, aber hier kann die 8 nun noch weiter zerlegt werden: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Somit lautet die endgültige Zerlegung: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Zur besseren Übersicht werden die Einzelteile der Größe nach geordnet notiert.

Diese Zerlegung einer Zahl in Einzelteile, die man nicht weiter zerlegen kann, heißt **Primfaktorzerlegung**, die Einzelteile heißen **Primzahlen**.

Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$, wobei diese Aufzählung nicht endet. Das heißt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Eine Primzahl lässt sich nur durch sich selbst und 1 ganzzahlig teilen.
Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder – bis auf die Reihenfolge – eindeutiges Produkt von zwei oder mehr Primzahlen.

Zwischen zwei Studierenden kommt es hierzu zu einer Meinungsverschiedenheit:

John : Wenn für eine Primzahl gilt, dass sie durch 1 und sich selbst teilbar ist, dann ist doch wohl 1 auch eine Primzahl, schließlich ist sie durch 1 und auch durch sich selbst teilbar. Okay, das ist in beiden Fällen dieselbe Zahl, aber deswegen erfüllt sie doch aber trotzdem diese Bedingung.

Lisa : Ja, aber wenn 1 eine Primzahl wäre, könnte man zum Beispiel 4 auf zwei oder sogar unendlich viele Möglichkeiten zerlegen, zum Beispiel $4 = 2 \cdot 2$ oder $4 = 2 \cdot 2 \cdot 1$ oder $\ldots$.

John : Ach so! Dann wäre die Primfaktorzerlegung ja nicht eindeutig. Also ist 1 keine Primzahl.

Das folgende Beispiel zeigt die Vorgehensweise bei der Primfaktorzerlegung von 90:

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 45 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Um also alle möglichen Primfaktoren einer natürlichen Zahl n zu bestimmen, testet man alle Primzahlen kleiner als $\sqrt{n}$, beginnend mit der 2. Bei 78 beispielsweise testet man also mit 2, 3, 5 und 7, weil $\sqrt{78} < 9$. Die Primzahlen 2 und 3 teilen 78 und sind somit Primfaktoren von 78, also ist $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Der Primfaktor 13 ergibt sich dabei von selbst.
Überprüfen Sie dies erneut an einer von Ihnen gewählten Zahl.

Anwendungen der Primfaktorzerlegung

Beim Kürzen und Erweitern von Brüchen hilft sie, Rechenaufwand zu reduzieren. Betrachten Sie dazu die Zahlen 12 und 18:

12 hat die Teiler $1, 2, 3, 4, 6, \quad 12.$
18 hat die Teiler $1, 2, 3, \quad 6, 9, \quad 18.$

Somit haben beide Zahlen die gemeinsamen Teiler $1, 2, 3$ und 6.

Der **größte gemeinsame Teiler**, ggT, von 12 und 18 ist die 6. Man schreibt:

$$\mathrm{ggT}(12, 18) = 6.$$

Bei Zahlen wie 12 und 18 ist es nicht besonders schwierig, den größten gemeinsamen Teiler zu finden. Doch was ist der ggT von 756 und 990? Natürlich können Sie durch Probieren die 18 finden! Und wenn nicht? Dann leistet die Primfaktorzerlegung beider Zahlen gute Dienste:

$$\begin{array}{rlllllll} 756 = & \boxed{2} \cdot & 2 \cdot & \boxed{3} \cdot & \boxed{3} \cdot & 3 \cdot & & 7 \\ 990 = & \boxed{2} \cdot & & \boxed{3} \cdot & \boxed{3} \cdot & & 5 \cdot & 11 \end{array}$$

Hier erkennt man sofort, dass beide Zahlen die Faktoren 2 und 3 besitzen, wobei die 3 sogar zweimal vorkommt. Den größten gemeinsamen Teiler erhält man nun einfach durch Multiplikation dieser gemeinsamen Faktoren unter Berücksichtigung ihrer kleinsten Vielfachheit, also:

$$\mathrm{ggT}(756, 990) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

Vor diesem Hintergrund vergleichen Sie nun einmal die verschiedenen Arten, einen Bruch zu kürzen:

$$\frac{756}{990} = \frac{2 \cdot 378}{2 \cdot 495} = \frac{378}{495} = \frac{3 \cdot 126}{3 \cdot 165} = \frac{126}{165} = \frac{3 \cdot 42}{3 \cdot 55} = \frac{42}{55},$$

$$\frac{756}{990} = \frac{18 \cdot 42}{18 \cdot 55} = \frac{42}{55},$$

$$\frac{756}{990} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{42}{55}.$$

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen hilft die Primfaktorzerlegung den kleinsten Hauptnenner zu finden. Betrachten Sie dazu die Zahlen 2 und 3. Vielfache beider Zahlen sind sicher $6, 12, 18, 24, 30, \ldots$, wobei 6 das **kleinste gemeinsame Vielfache**, kgV, ist. Man schreibt:

$$\mathrm{kgV}(2,3) = 6.$$

Kein Problem! Aber was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 18 und 24? Sicher ist $18 \cdot 24 = 432$ ein gemeinsames Vielfaches, aber ist es das kleinste? Vermutlich nicht, aber wie kann man es finden? Auch hier helfen wieder die Primfaktorzerlegungen beider Zahlen:

$$\begin{array}{rlllllll} 18 = & \boxed{2} \cdot & & & & \boxed{3} \cdot & \boxed{3} \\ 24 = & \boxed{2} \cdot & \boxed{2} \cdot & \boxed{2} \cdot & & \boxed{3} & \end{array}$$

In beiden Zerlegungen kommen lediglich die Primzahlen 2 und 3 vor und zwar mit unterschiedlicher Häufigkeit. Das kleinste gemeinsame Vielfache erhält man nun, indem man diese Primzahlen miteinander multipliziert, und zwar jeweils mit der größten Vielfachheit, also

$$\text{kgV}(18, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72.$$

Vor diesem Hintergrund vergleichen Sie nun einmal die beiden Arten, zwei Brüche zu addieren.
Die Verwendung von $18 \cdot 24$ als gemeinsamer Nenner

$$\frac{1}{18} + \frac{5}{24} = \frac{1 \cdot 24 + 5 \cdot 18}{18 \cdot 24} = \frac{114}{18 \cdot 24} = \frac{6 \cdot 19}{18 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{19}{72}$$

oder die gleiche Rechnung unter Ausnutzung des $\mathrm{kgV}(18, 24)$

$$\frac{1}{18} + \frac{5}{24} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 18} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 24} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{72} = \frac{19}{72}.$$

Gemischte Übungsaufgaben zur Primfaktorzerlegung

1. Bestimmen Sie.

   a) $\mathrm{ggT}(5586; 693) =$

   b) $\mathrm{ggT}(32; 1024) =$

   c) $\mathrm{ggT}(21a; 6a) =$

   d) $\mathrm{ggT}(12c^2d; 18cd^2) =$

   e) $\mathrm{kgV}(5586; 693) =$

   f) $\mathrm{kgV}(32; 1024) =$

   g) $\mathrm{kgV}(21a; 6a) =$

   h) $\mathrm{kgV}(12c^2d; 18cd^2) =$

   i) $\mathrm{kgV}(x; x+1) =$

   j) $\mathrm{kgV}(x+y; -x-y) =$

   k) $\mathrm{kgV}(21a; 3a) =$

   l) $\mathrm{kgV}(42x; 3x) =$

   m) $\mathrm{kgV}\left(72(a-b); 48\left(a^2-b^2\right)\right) =$

   n) $\mathrm{kgV}\left(x^3z+yx^2; 7xy-7y^2\right) =$

12.2 Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die gesuchte Variable im Argument von Wurzeln vorkommt, heißen **Wurzelgleichungen**.

Wurzelgleichungen kann man in der Regel nach folgendem Schema lösen:

(1) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}$. Bei geradem Wurzelexponenten darf unter der Wurzel nichts Negatives stehen.

(2) Formen Sie die Gleichung mit geeigneten Äquivalenzumformungen so um, dass ein Wurzelterm auf der einen Seite und alle anderen Terme (eventuell weitere Wurzelterme) auf der anderen Seite der Gleichung stehen.

(3) Potenzieren Sie beide Gleichungen mit dem Wurzelexponenten.

(4) Wiederholen Sie die beiden vorherigen Schritte so lange, bis keine Wurzelterme mehr vorhanden sind und lösen Sie die so erhaltene Gleichung.

(5) Machen Sie die Probe.

(6) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

Bei Wurzelgleichungen mit geraden Exponenten ist im Gegensatz zu anderen Gleichungen die Probe zwingend erforderlich. Denn da das Potenzieren in Schritt (3) dann keine Äquivalenzumformung ist, können dabei zusätzliche Lösungen, sogenannte Scheinlösungen, entstehen.

<u>Beispiel 1:</u> Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{6x-2}+5-3x=0$.

(1) Damit der Wurzelterm definiert ist, muss $6x-2 \geq 0$ gelten, also $x \geq \frac{1}{3}$. Somit gilt für die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

$$
\begin{array}{llcl}
 & & \sqrt{6x-2}+5-3x=0 & |-5+3x \\
(2) & \Longleftrightarrow & \sqrt{6x-2}=-5+3x & |(...)^2 \\
(3) & \Longrightarrow & (\sqrt{6x-2})^2=(-5+3x)^2 & \\
 & \Longleftrightarrow & 6x-2=25-30x+9x^2 & |-6x+2 \\
 & \Longleftrightarrow & 0=9x^2-36x+27 & |:9 \\
 & \Longleftrightarrow & 0=x^2-4x+3 & \\
 & \Longleftrightarrow & x=2\pm\sqrt{4-3} & \\
(4) & \Longleftrightarrow & x=2\pm 1 &
\end{array}
$$

(5) Probe: $\sqrt{6\cdot 3-2}+5-3\cdot 3=0$, also ist $x=3$ eine Lösung der Wurzelgleichung,
und $\sqrt{6\cdot 1-2}+5-3\cdot 1\neq 0$, also ist $x=1$ keine Lösung der Wurzelgleichung.

(6) Also ist $\mathbb{L}=\{3\}$

Beispiel 2: Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x-3}=5$.

(1) Damit beide Wurzelterme definiert sind, muss $2x+8 \geq 0$ und $x-3 \geq 0$ gelten, also $x \geq 3$. Somit gilt für die Definitionsmenge $\mathbb{D}=[3,\infty)$.

$$
\begin{array}{llrcll}
 & & \sqrt{2x+8}+\sqrt{x-3} &=& 5 & \quad |-\sqrt{x-3} \\
(2) & \Longleftrightarrow & \sqrt{2x+8} &=& 5-\sqrt{x-3} & \quad |(...)^2 \\
(3) & \Longrightarrow & (\sqrt{2x+8})^2 &=& (5-\sqrt{x-3})^2 & \\
 & \Longleftrightarrow & 2x+8 &=& 25-10\sqrt{x-3}+(x-3) & \quad |+10\sqrt{x-3}-2x-8 \\
(2) & \Longleftrightarrow & 10\sqrt{x-3} &=& 14-x & \quad |(...)^2 \\
(3) & \Longrightarrow & (10\sqrt{x-3})^2 &=& (14-x)^2 & \\
 & \Longleftrightarrow & 100(x-3) &=& 196-28x+x^2 & \quad |-100(x-3) \\
 & \Longleftrightarrow & 0 &=& x^2-128x+496 & \\
 & \Longleftrightarrow & x &=& 64 \pm \sqrt{64^2-496} & \\
(4) & \Longleftrightarrow & x &=& 64 \pm 60 &
\end{array}
$$

(5) Probe: $\sqrt{2\cdot 4+8}+\sqrt{4-3}=5$, also ist $x=4$ eine Lösung der Wurzelgleichung,
und $\sqrt{2\cdot 124+8}+\sqrt{124-3}=27 \neq 5$, also ist $x=124$ keine Lösung der Wurzelgleichung.
(6) Also ist $\mathbb{L}=\{4\}$

Gemischte Übungsaufgaben zu Wurzelgleichungen

1. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen.

   a) $2\sqrt{x-1}=1-x$

   b) $\sqrt{3x-1}=2\sqrt{x}$

   c) $\sqrt{9x^2-64}=3x+8$

   d) $\sqrt{4x-27}-3=0$

   e) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3$

   f) $\sqrt[3]{3x-7}-5=0$

12.3 Ungleichungen

Werden zwei Terme T_1 und T_2 durch ein $<, \leq, >$ oder $\geq$ verbunden, so spricht man von einer **Ungleichung**. Dabei bedeutet

$T_1 < T_2$:	T_1 ist kleiner als T_2.
$T_1 \leq T_2$:	T_1 ist kleiner oder gleich T_2.
$T_1 > T_2$:	T_1 ist größer als T_2.
$T_1 \geq T_2$:	T_1 ist größer oder gleich T_2.

Genau wie Gleichungen sind auch Ungleichungen Aussagen, die wahr oder falsch sein können. Beispielsweise sind $5 \leq 3$ und $4 > 4$ falsche Aussagen, $5 > 3$ und $4 \leq 4$ sind wahre Aussagen. $2x > 4$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn x größer als 2 ist. In der **Lösungsmenge** einer Ungleichung werden alle Variablen, für die die Ungleichung eine wahre Aussage ist, zusammengefasst.
Auch Ungleichungen kann man mit Hilfe von Äquivalenzumformungen umformen, um die Lösungsmenge zu bestimmen oder direkt ablesen zu können. Dabei muss man allerdings einige Regeln beachten:

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Bei folgenden Umformungen ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht:

1. Bei Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung.
2. Bei Multiplikation oder Division eines Terms > 0 auf beiden Seiten der Ungleichung.
3. Bei Multiplikation oder Division mit einem Term < 0 auf beiden Seiten der Ungleichung, wenn das Relationszeichen umgedreht wird:
   - Aus $<$ wird $>$,
   - Aus $\leq$ wird $\geq$,
   - Aus $>$ wird $<$,
   - Aus $\geq$ wird $\leq$.

Hinweise:

- Aufgabe 4 im Kapitel 1.1 macht deutlich, warum diese Regeln gelten.
- Bei vielen Termen mit Variablen hängt das Vorzeichen des Terms davon ab, was man für die Variablen einsetzt. Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit so einem Term, muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Beispielsweise ist $x - 1$ positiv für $x > 1$ und negativ für $x < 1$. Für $x > 1$ bleibt das Relationszeichen bei der Multiplikation mit $x - 1$ also gleich, für $x < 1$ muss es umgedreht werden. Dies soll in diesem Kurs aber nicht weiter behandelt werden.
- Im Gegensatz zu Lösungsmengen von Gleichungen bestehen Lösungsmengen von Ungleichungen üblicherweise nicht aus einzelnen Zahlen, sondern aus einem oder mehreren Intervallen.

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Ungleichung $-2x+5 \leq -x-4$.

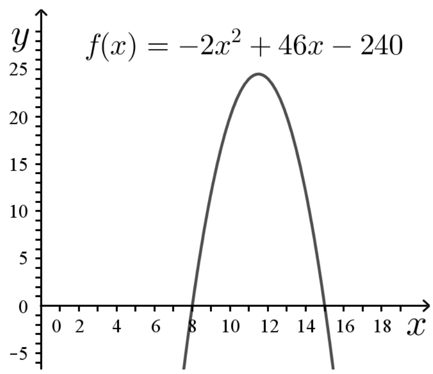
$$
\begin{array}{lcl}
 & -2x+5 \leq x-4 & \mid -x-5 \\
\iff & -3x \leq -9 & \mid : (-3) \\
\iff & x \geq 3 &
\end{array}
$$

Weil im zweiten Schritt durch eine negative Zahl dividiert wurde, musste das Relationszeichen umgedreht werden. Die Ungleichung wird also von allen Zahlen gelöst, die größer oder gleich 3 sind. Damit gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L} = [3; \infty)$.

Beispiel 2: Für die Lösung der Aufgabe 4 im Kapitel 8.3 muss die quadratische Ungleichung

$$-2x^2 + 46x - 240 > 0$$

gelöst werden. Die linke Seite dieser Gleichung kann man als quadratische Funktion auffassen, deren Nullstellen 8 und 15 man beispielsweise mit der pq-Formel berechnen kann. Beim Graphen der Funktion $f(x) = -2x^2 + 46x - 240$ handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, also liegt dieser Graph genau zwischen den beiden Nullstellen oberhalb der x-Achse. Damit ist auch in genau diesem Bereich die Ungleichung $-2x^2 + 46x - 240 > 0$ erfüllt. Für die gesuchte Lösungsmenge gilt also $\mathbb{L} = (8; 15)$.



Gemischte Übungsaufgaben zu Ungleichungen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $5x + 2 \leq -18$

b) $-3(x+2) > 9$

c) $\frac{1}{2}(1+2x) > -(x+4) + 2x + 3$

d) $2x(2x-3) \leq 4(x^2+x+1)$

e) $(x-3)(x+1) < 0$

f) $-x^2 + x + 12 > 0$

g) $-4x^2 + 10x \leq -24$

h) $x^2 - 2x + 2 \leq 1$

12.4 Das Summenzeichen

Eine elektrische Schaltung enthalte drei Widerstände. Bei einer Reihenschaltung erhält man den Gesamtwiderstand, indem man die Widerstände addiert.

Um dies in die mathematische Formelsprache zu übersetzen, werden gleichartige Größen (hier: die Widerstände) in der Regel durch denselben Buchstaben (hier: R) bezeichnet, dem ein Index (tiefer gestellte Zahl) beigefügt wird:

Bei drei Widerständen sind das die Indizes 1, 2, und 3, also R_1, R_2 und R_3. Durch den Index wird zum Ausdruck gebracht, dass die Widerstände R_1, R_2 und R_3 trotz des gleichen Buchstabens verschiedene Werte haben. Durch die Indizierung liegt zugleich eine Nummerierung vor: Es gibt einen ersten, zweiten und dritten Wert des Widerstandes.

Für den Gesamtwiderstand R_{ges} kann man dann schreiben:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Bei drei Summanden ist diese Schreibweise kein Problem, bei einer größeren Anzahl schon. Bei zum Beispiel zehn Widerständen sähe das so aus:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9 + R_{10},$$

d. h. mit wachsendem Index wird der Ausdruck auf der rechten Seite sehr unübersichtlich. Häufig schreibt man dafür kürzer:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_{10},$$

wobei die Pünktchen für die nicht notierten Summanden $R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9$ stehen.

Noch bequemer ist die folgende Schreibweise, welche die Struktur der rechten Seite berücksichtigt. Hierbei handelt es sich um eine Summe, in der 10 Werte aufsummiert werden, die sich formal lediglich im Index unterscheiden. In der Mathematik verwendet man daher den griechischen Buchstaben Sigma Σ als Symbol für die Summenbildung, notiert den ersten und letzten Index und wählt R_i als Stellvertreter für sämtliche Summanden R_1, $R_2, \ldots, R_{10}$. Also:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_{10} = \sum_{i=1}^{10} R_i.$$

Lies: „R_{gesamt} = Summe von i gleich 1 bis 10 von R_i“.

Die 1 unter und die 10 über dem Summenzeichen bedeuten, dass man für i in R_i nacheinander die Werte von 1 bis 10 einsetzt und aufsummiert. Dabei kann der Summationsindex beliebig gewählt werden. Man könnte ebenso gut l, k oder jeden anderen Buchstaben anstelle von i wählen:

$$\sum_{i=1}^{10} R_i = \sum_{j=1}^{10} R_j = \sum_{k=1}^{10} R_k.$$

Gemischte Übungsaufgaben zum Summenzeichen

1. Es wird eine elektrische Schaltung mit drei Widerständen in einer Parallelschaltung betrachtet. In diesem Fall ist der Kehrwert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Kehrwerte der einzelnen Widerstände.
   Formulieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Summenzeichens.

2. Schreiben Sie ohne Summenzeichen.
   a) $\sum_{i=5}^{8} F_i =$
   b) $\sum_{k=2}^{7} (2k+1) =$

3. Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens.
   a) $a_0 + a_1 + a_2 =$
   b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$
   c) $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 100 =$

4. Schreiben Sie die folgenden Summen ohne das Summenzeichen. Was stellen Sie fest?
   a) $\sum_{k=5}^{9} R_k =$
   b) $\sum_{j=3}^{7} R_{j+2} =$
   c) $\sum_{l=6}^{10} R_{l-1} =$
   d) $\sum_{i=1}^{5} R_{10-i} =$

5. Gegeben sei die folgende Wertetabelle.

i	1	2	3	4	5
x_i	5	3	2	1	6
y_i	2	3	4	1	0

Berechnen Sie die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=1}^{5} x_i =$

b) $\sum_{i=1}^{5} x_i + y_i =$

c) $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i =$

d) $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \sum_{i=1}^{5} y_i =$

e) $\sum_{i=1}^{5} x_i + 2 =$

f) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 2) =$

g) $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot 2 =$

h) $\sum_{i=1}^{5} (x_i \cdot 2) =$

i) $\sum_{i=1}^{100} i =$

6. Ergänzen Sie.

a)

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m-1}^{\ldots} a_{\ldots} = \sum_{j=\ldots}^{n-p} a_{\ldots}$$

b)

$$\sum_{\ldots=m}^{n} a_j = \sum_{j=\ldots}^{n+1} a_{\ldots} = \sum_{\ldots}^{\ldots} a_{j-p}$$

12.5 Die Fakultät und der Binomialkoeffizient

Stellen Sie sich vor, vier Studierende bestellen einen Fotografen, der ein Gruppenbild von ihnen machen soll. Für das Foto wollen sich die vier nebeneinander auf ein Sofa mit vier Sitzen setzen.
Frage: Wie viele verschiedene Aufnahmen kann der Fotograf machen?
Lösung: Der erste Student betritt den Raum und nimmt auf dem Sofa Platz. Er hat 4 Möglichkeiten sich zu setzen. Der zweite Student kommt herein und hat jetzt nur noch 3 Möglichkeiten, Platz zu nehmen, da bereits einer der Plätze belegt ist. Nimmt der erste Student den ersten Platz, hat der zweite Student noch die Wahl zwischen den Sitzen $2, 3$ und 4. Wählt der erste Student aber Platz 2 hat der zweite Student wiederum 3 Möglichkeiten seien Platz zu wählen, nämlich $1, 3$ und 4, usw. Insgesamt haben die beide Studenten zusammen somit $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten, Platz zu nehmen. Der dritte Student findet dann nur noch 2 freie Plätze vor, zwischen denen er sich entscheiden kann, und der vierte Student nur noch einen. Damit können die vier Studenten insgesamt auf $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedenen Arten fotografiert werden.
Wollten Sie diese Anzahl für 10 Studierende ermitteln, müssten Sie das Produkt der ersten 10 natürlichen Zahlen bilden: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mit wachsender Anzahl der Personen wird dieser Ausdruck immer unübersichtlicher. Zum Glück gibt es auch hier eine Abkürzung mit Hilfe der sogenannten **Fakultät** !:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Sprechweise: „10 Fakultät“. Allgemein gilt:

Die **Fakultät** ist definiert als

$$0! = 1 \text{ und } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ für natürliche Zahlen } n.$$

Ein weiterer oft in der Mathematik verwendeter Begriff ist der **Binomialkoeffizient**:

Der **Binomialkoeffizient** ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

für ganzzahlige, nichtnegative Zahlen n und k mit $k \leq n$.

Der Binomialkoeffizient ist Ihnen im Alltag schon begegnet, zum Beispiel mittwochs und samstags bei der Ziehung der Lottozahlen. Der Binomialkoeffizient $\binom{49}{6}$ gibt nämlich die Anzahl der Möglichkeiten an, aus 49 Zahlen 6 Zahlen auszuwählen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Es ist also

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 43 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot \cancel{43} \cdot \cancel{42} \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{43} \cdot \cancel{42} \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \\ &= \frac{49 \cdot \cancel{48} \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{209757540}{15} = 13983816.\end{aligned}$$

13 Lösungen

Lösungen zu Abschnitt 1.4

1. a) $32a + 16b$
   b) $12{,}5p^2 + 35p$
   c) $10x + xy + 5y + 8z$
   d) $15bx - 3b^2 + 12b$
   e) $-3a^2x^2 + 3acx + 4axy$
   f) $20defg - 18d^2f - 6d^2ef$
   g) $4c^2 + 2c - 2$
   h) $-0{,}3d^2 - 18{,}1d - 6$
   i) $-0{,}1d^2 + 3{,}9d + 4$
   j) $8a^2b^2 + 11,6ab - 0{,}6$
   k) $-0{,}16a^2b^2 + 0{,}64ab - 0{,}6$
   l) $-10x + 4y + 6z$
   m) $54p - 15q$
   n) $-3{,}6axy$

2. a) $2ab(3a + 4b)$
   b) $13x(3a^2x + 5b^2 + 7x^2)$
   c) $2ef(2d - 5e)$
   d) $5e(4f^2 + 1 + 3dg)$
   e) $5c(4 - 5b^2 + 3bc)$
   f) $6a(6b + 1 + 8ab^2)$
   g) $12ac(5ab^2 + 3 + 7d^2)$
   h) $11x(y + 3a - 2z)$
   i) $(x + y)(a + b)$
   j) $(b + c)(b - c)^2$

3. a) $9a^2 - 5{,}4a + 0{,}81$
   b) $1{,}44a^2 - 0{,}48ad + 0{,}04d^2$
   c) $0{,}25a^2 + 0{,}2ay + 0{,}04y^2$

4. a) $(4a - 9cy)^2$
   b) $(0{,}3d + 0{,}9g)(0{,}3d - 0{,}9g)$
   c) $(3de + 7g)^2$

5. a) $(d - 6g)^2 = d^2 - 12dg + 36g^2$
   b) $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$
   c) $(d - 3e)^2 = d^2 - 6de + 9e^2$

Lösungen zu Abschnitt 2.3

1. a) $\dfrac{34}{35}$ b) $-\dfrac{1}{165}$ c) $-\dfrac{1}{18}$ d) $\dfrac{16}{15}$ e) $\dfrac{27}{16}$

2. a) $\dfrac{7y}{7xy}$ b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ c) $\dfrac{(z-9)^2}{-9(9-z)}$ d) $\dfrac{(x-2y)(-x+y)}{(y-x)^2}$

3. a) $\dfrac{3a}{b}$ b) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{5a+7b}{-3}$ d) $-\dfrac{a}{2}$ e) $\dfrac{9x-4y}{45x+28y}$

4. a) $\dfrac{7}{3a}$
   b) $\dfrac{(4a+3b)(4a-3b)}{12ab}$
   c) $\dfrac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$
   d) $\dfrac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$
   e) $\dfrac{c^3+d^3}{3c^2d^2}$
   f) $\dfrac{2a^2+2ab+3b^2}{144(a^2-b^2)}$

5. a) 6 b) $\frac{5x}{7y}$ c) $3ac$ d) 1

Lösungen zu Abschnitt 3.2

1. a) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, \frac{x}{3} \in \mathbb{N}, 10 < x < 25\} = \{12; 15; 18; 21; 24\}$
   b) $]\frac{2}{3}; \frac{19}{3}[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{2}{3} < x < \frac{19}{3}\}$
   c) $[x; y[= \{r \in \mathbb{R} \,|\, x \leq r < y\}$
   d) $[-3; 415] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 \leq x \leq 415\}$

2. a) Alle reellen Zahlen zwischen -2 und 1, einschließlich 1.
   b) Alle rationalen Zahlen zwischen -1 und 1.
   c) Die Menge der Zahlen -2, -1 und 0.

3. a) $[3; 7)$ b) $(4; 5]$ c) $(5; 7)$

Lösungen zu Abschnitt 4.2

1. a) $\mathbb{L} = \{12\}$
   b) $\mathbb{L} = \{9\}$
   c) $\mathbb{L} = \{2\}$
   d) $\mathbb{L} = \{3\}$
   e) $\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$
   f) $\mathbb{L} = \{1\}$
   g) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
   h) $\mathbb{L} = \{0\}$
   i) $\mathbb{L} = \{\frac{1}{4}\}$
   j) $\mathbb{L} = \{1\}$
   k) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
   l) $\mathbb{L} = \{\}$
   m) $\mathbb{L} = \{-\frac{13}{3}\}$
   n) $\mathbb{L} = \{\}$

2. a) $\mathbb{L} = \{-a + 1\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{\dfrac{3}{2t-1}\right\}$ c) $\mathbb{L} = \left\{\dfrac{3yz}{3+z}\right\}$

Lösungen zu Abschnitt 4.4

1. $f_1(x) = -3x + 2;$ $f_2(x) = -\frac{2}{5}x;$ $f_3(x) = 3;$ $f_4(x) = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$

2. a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
   b) $f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$
   c) $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$

3. a) $\mathbb{D}_p = (0; 20)$ oder $\mathbb{D}_p = \{1; 2; \ldots; 18; 19\}$
   b) Es werden 15 Mengeneinheiten des Gutes abgesetzt.

4. a) $68\,°\text{F}$
   b) $F = 1{,}8C + 32$ und $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$, wobei F für die Temperatur in °F und C für die Temperatur in °C steht.
   c) $\approx 56{,}7\,°\text{C}$

Lösungen zu Abschnitt 5.4

1. a) $\mathbb{L} = \{(7; 1; -1)\}$
   b) $\mathbb{L} = \{(1; 3)\}$
   c) $\mathbb{L} = \{(2; 5; -1; 3)\}$
   d) $\mathbb{L} = \{(3-k; k; -2) | k \in \mathbb{R}\}$
   e) $\mathbb{L} = \{(10 - \frac{11}{2}k; 9-4k; k) | k \in \mathbb{R}\}$
   f) $\mathbb{L} = \{\}$
2. a) Der erste besitzt 20 €, der zweite 15 € und der dritte 10 €.
   b) Die Rechnung betrug 25 €.
3. Anna ist 18 Jahre alt.
4. Bei Silvias Mutter.

Lösungen zu Abschnitt 6.2

1. a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $\mathbb{L} = \{\frac{4}{5}\}$
   b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ und $\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$
   c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ und $\mathbb{L} = \{-2\}$
   d) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\mathbb{L} = \{6\}$
   e) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$ und $\mathbb{L} = \{-2\}$
   f) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ und $\mathbb{L} = \{\frac{8}{5}\}$
   g) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ und $\mathbb{L} = \{-\frac{13}{3}\}$
2. Wenn man $\frac{3}{2}$ durch -1 ersetzt, hat die Gleichung die Lösung $x = -1$.
3. Die Aussage ist falsch, weil die Gleichung nicht für $x = 3$ gilt.

Lösungen zu Abschnitt 7.4

1. a) $\sqrt[12]{x}$
   b) $\sqrt[3]{x}$
   c) $\frac{99}{2}$
   d) $\sqrt{a^2+b^2}$
   e) $a+b$
   f) $x\sqrt{a+b}$
   g) x
   h) $\frac{1}{ab^3}$
   i) $a^{\frac{3}{2}}$
   j) a^{-4}
   k) $a^{-\frac{1}{3}}$
   l) 1
   m) a
   n) $\frac{1}{81x^2}$
   o) $\frac{3^3}{x^{12}y^6}$
   p) $a+b$
   q) a
   r) $1-x^2$
2. a) $\sqrt{a}\sqrt{b}$
   b) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$
   c) $a+\sqrt{a^2-b}$
3. Das Müllaufkommen steigt jährlich um $4\,\%$.

Lösungen zu Abschnitt 8.3

1. a) $\mathbb{L} = \{\pm\frac{5}{2}\}$
   b) $\mathbb{L} = \{\}$
   c) $\mathbb{L} = \{0; 4\}$
   d) $\mathbb{L} = \left\{-3; \frac{5}{2}\right\}$
   e) $\mathbb{L} = \left\{0; -\frac{5}{2}\right\}$
   f) $\mathbb{L} = \{0; \frac{3}{2}\}$
   g) $\mathbb{L} = \{-5; 3\}$
   h) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3}; 2\right\}$
   i) $\mathbb{L} = \{0; 6\}$
   j) $\mathbb{L} = \left\{1; \frac{7}{6}\right\}$
   k) $\mathbb{L} = \{\}$

2. a) $\mathbb{L} = \{0; 1; -2\}$
   b) $\mathbb{L} = \{0\}$
   c) $\mathbb{L} = \{0; -\frac{3}{2}\}$
   d) $\mathbb{L} = \left\{0; -\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{8}\right\}$
   e) $\mathbb{L} = \left\{0; \frac{5}{2}\right\}$
   f) $\mathbb{L} = \left\{0; -\frac{2}{3}; 1\right\}$
   g) $\mathbb{L} = \left\{0; 1 \pm \sqrt{2}\right\}$
   h) $\mathbb{L} = \{0\}$

3. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 3\}$ und $\mathbb{L} = \{-9\}$

4. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Das Unternehmen macht Gewinn für $8 < x < 15$ (siehe Beispiel 2 im Kapitel 12.3).

Lösungen zu Abschnitt 9.5

1. a) $x = \frac{1}{2}$
   b) $x = \frac{1}{8}$
   c) $x = 2$
   d) $x = 5$

2. a) $\log_a 4$
   b) $\log_2 \left(\frac{5^4 7}{2^3}\right)$
   c) $\ln \left(\frac{x^a z^c}{y^{\frac{1}{b}}}\right)$

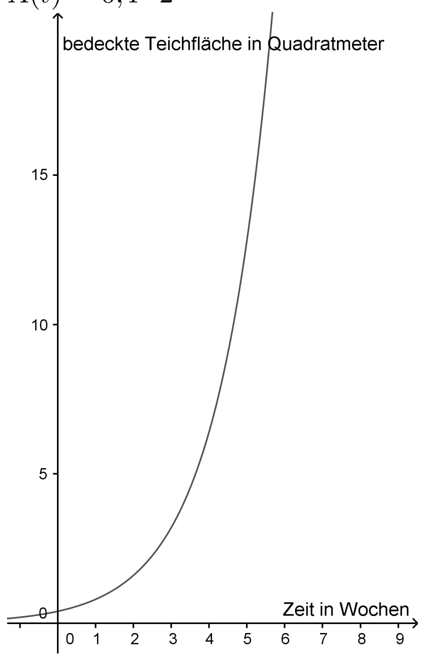
3. $\frac{4}{3}$

4. a) 2
   b) $-n$
   c) $\frac{1}{2}$
   d) -6
   e) 20
   f) $\frac{1}{3}$
   g) $\frac{1}{5}$
   h) $\ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}$
   i) $\frac{k}{2}$
   j) $\ln(3) - 1$
   k) $\ln(\frac{2}{3}) + \frac{1}{2}$
   l) 2
   m) b^a
   n) c^{-t}
   o) x
   p) 0
   q) b
   r) x
   s) 1
   t) b

5. a) $\mathbb{L} = \{3\}$
   b) $\mathbb{L} = \{\frac{\ln 2}{3}\}$
   c) $\mathbb{L} = \{0\}$
   d) $\mathbb{L} = \{5\}$
   e) $\mathbb{L} = \{2\}$
   f) $\mathbb{L} = \{-3\}$
   g) $\mathbb{L} = \{-1\}$
   h) $\mathbb{L} = \{100\}$
   i) $\mathbb{L} = \{16\}$
   j) $\mathbb{L} = \{2\}$
   k) $\mathbb{L} = \{\}$
   l) $\mathbb{L} = \{1\}$
   m) $\mathbb{L} = \{1; 10\}$
   n) $\mathbb{L} = \{1\}$

6. Das Müllaufkommen hat sich nach 17 Jahren und 8 Monaten verdoppelt.

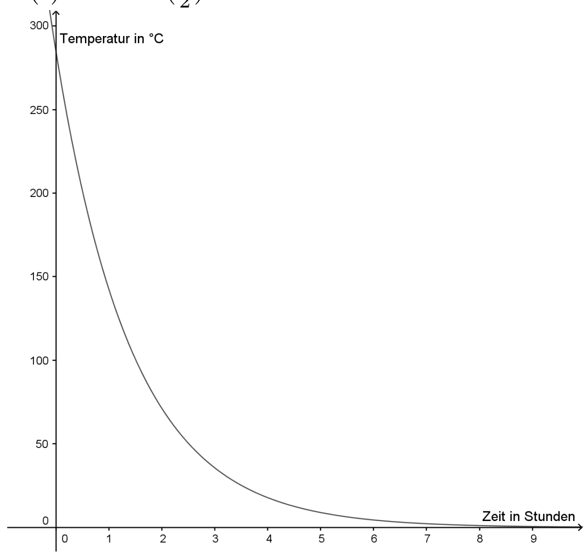
7. a) $A(t) = 0{,}4 \cdot 2^t$



b) Im Laufe der sechsten Woche.

c) Vor einer Woche.

8. a) $T(t) = 285 \cdot (\frac{1}{2})^t$



b) Nach 5 Stunden ist der Körper noch etwa $9\,^\circ$C warm.

c) Nach etwas mehr als 8 Stunden.

9. a) Vor zwei Jahren betrug das Guthaben 1100 €.

b) In drei Jahren beträgt das Guthaben $1403{,}91$ €.

10. Ja, denn die Lichtintensität beträgt in 3 Metern Tiefe noch ca. $65{,}97\,\%$.

Lösungen zu Abschnitt 10.2

1. Nur der Graph von $f_2(x)$ ist eine Ursprungsgerade, deswegen beschreibt auch nur diese Funktion einen proportionalen Zusammenhang.

2. a) $5{,}25$ m

   b) 1 m ($1{,}5$ m, $2 \cdot ...$)

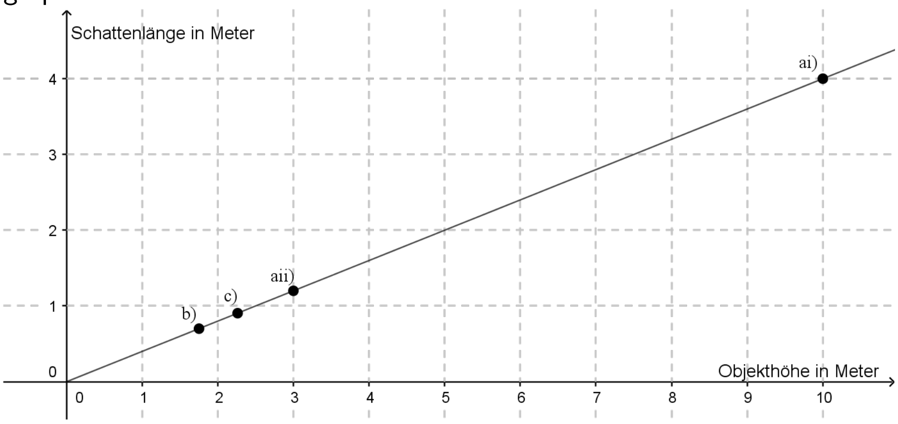
3. a) i) 4 m, ii) $1{,}2$ m

   b) $1{,}75$ m

   c) $2{,}25$ m

   d) Wie viele Meter Schatten entstehen pro Meter Objekt?
   Wie hoch muss das Objekt pro Meter Schatten sein?

   e) graphisch:



4. Herr A erhält 400 € und Frau B bekommt 600 €.

5. a) Falls der Pool eine ebene Grundfläche und senkrechte Wände hat, läuft er nach 20 Minuten über.

   b) Kann man nicht sinnvoll beantworten, da ein Stausee keine ebene Grundfläche und keine senkrechten Wände hat und Niederschlagsmenge und Verdunstungsmenge variieren.

   c) Kann man nicht sinnvoll beantworten, da die Temperatur nicht gleichmäßig ansteigt.

   d) Würden sich Preis und Menge proportional verhalten, würde das 800 g Glas etwa 3 € kosten.

   e) Kann man nicht sinnvoll beantworten, da er die Geschwindigkeit nicht beibehalten kann.

   f) Wenn man von einer Entfernung von 70 km ausgeht, braucht er 3 Stunden und 30 Minuten.

   g) Wenn genau so weiter getrunken wird, ist das Bier nach 5 Stunden und 20 Minuten alle.

   h) Kann man nicht sinnvoll beantworten, da man nicht weiß, wie die Hausaufgaben verteilt werden können.

Lösungen zu Abschnitt 10.5

1. a) $7{,}2\,\text{cm}$

   b) Man kann das Foto auf $184{,}62\,\%$ vergrößern.

   c) Man muss um $29{,}5\,\%$ verkleinern, also auf $70{,}5\,\%$ kopieren.

   d) Das Original hat die Maße $33\,\text{cm}$ x $23{,}33\,\text{cm}$.

   e) Man muss das Foto auf $173{,}2\,\%$ vergrößern.

   f) Die Fläche wird verneunfacht.

   g) Die Größe der zweiten Kopie ist $225\,\%$ vom Original.

2. Der Preisnachlass beträgt insgesamt $58\,\%$.

3. Die Preise müssen nach der Messe um $54{,}54\,\%$ gesenkt werden.

4. Unabhängig von der Höhe des Anfangskapitals verdoppelt es sich nach ca 9 Jahren.

5. Der Durchschnittszinssatz beträgt $5{,}5\,\%$.

Lösungen zu Abschnitt 11.4

1. Der Laternenboden hängt ca. $2{,}73\,\text{m}$ über der Straße.

2. a) Der Weg ist $4{,}96\,\text{km}$ lang.

   b) der Winkel beträgt $36°$.

3. Die beiden Autos sind $128\,\text{km}$ voneinander entfernt.

4. Das Flugzeug überfliegt die Kirche in einer Höhe von $3{,}44\,\text{km}$.

5. a) Das Flugzeug steigt mit einem Winkel von ca. $6°$.

   b) Die vorgesehene Flughöhe ist nach ca. $95{,}68\,\text{km}$ erreicht.

Lösungen zu Abschnitt 12.1

1. a) 21
   b) 32
   c) $3a$
   d) $6cd$
   e) 184338
   f) 1024
   g) $42a$
   h) $36c^2d^2$
   i) $x(x+1)$
   j) $x+y$
   k) $21a$
   l) $42x$
   m) $144(a^2-b^2)$
   n) $7x^2y(xz+y)(x-y)$

Lösungen zu Abschnitt 12.2

1. a) $\mathbb{L}=\{1\}$
   b) $\mathbb{L}=\{\}$
   c) $\mathbb{L}=\{-\frac{8}{3}\}$
   d) $\mathbb{L}=\{9\}$
   e) $\mathbb{L}=\{2\}$
   f) $\mathbb{L}=\{44\}$

Lösungen zu Abschnitt 12.3

1. a) $\mathbb{L}=(-\infty;-4]$
   b) $\mathbb{L}=(-\infty;-5)$
   c) $\mathbb{L}=\mathbb{R}$
   d) $\mathbb{L}=[-\frac{2}{5};\infty)$
   e) $\mathbb{L}=(-1;3)$
   f) $\mathbb{L}=(-3;4)$
   g) $\mathbb{L}=(-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[4;\infty)$
   h) $\mathbb{L}=\{1\}$

Lösungen zu Abschnitt 12.4

1. $\frac{1}{R_{ges}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$
2. a) $F_5+F_6+F_7+F_8$
   b) $5+7+9+11+13+15$
3. a) $\sum\limits_{i=0}^{2}a_i$
   b) $\sum\limits_{i=1}^{5}i$
   c) $\sum\limits_{i=1}^{10}i^2$
4. Sie sind alle gleich: $R_5+R_6+R_7+R_8+R_9$
5. a) 17
   b) 27
   c) 28
   d) 170
   e) 19
   f) 27
   g) 34
   h) 34
   i) 5050
6. a) $\sum\limits_{j=m}^{n}a_j=\sum\limits_{j=m-1}^{n-1}a_{j+1}=\sum\limits_{j=m-p}^{n-p}a_{j+p}$
   b) $\sum\limits_{j=m}^{n}a_j=\sum\limits_{j=m+1}^{n+1}a_{j-1}=\sum\limits_{j=m+p}^{n+p}a_{j-p}$

Stichwortverzeichnis